

**Material y Apuntes**  
**TURBOMÁQUINAS TÉRMICAS**  
**CT-3412**

*Prof. Dr. Miguel ASUAJE*

## CONTENIDO

CONTENIDO .....	2
FIGURAS .....	3
1. ANÁLISIS DIMENSIONAL .....	4
2. DEFINICIONES DE RENDIMIENTO O EFICIENCIA .....	10
2.1. TURBINA .....	10
2.2. COMPRESOR .....	11
2.3. RENDIMIENTO O EFICIENCIA DE UNA TOBERA .....	18
2.4. RENDIMIENTO O EFICIENCIA DE UN DIFUSOR .....	19
3. FLUJO EN REJILLAS DE ALABES EN CASCADAS (flujo bidimensional) .	21
4. TURBINAS AXIALES (flujo bidimensional) .....	26
4.1. RENDIMIENTO O EFICIENCIA DE UNA ETAPA DE TURBINA.....	31
4.2. PÉRDIDAS EN LA ETAPA .....	32
4.3. Tipos de diseño de turbinas axiales .....	35
4.4. Grado de Reacción.....	36
5. COMPRESORES AXIALES (Flujo Bidimensional).....	41
5.1. Eficiencia de la etapa y Relación de Compresión.....	43
5.2. Grado de Reacción.....	45
5.3. Factor o coeficiente de carga .....	46
5.4. Características de funcionamiento fuera de diseño.....	48
REFERENCIAS .....	50

## FIGURAS

FIGURA N°1. Propiedad de Estancamiento .....	4
Figura N°2. Variación adiabática ideal de las condiciones de parada a lo largo de una turbomáquina .....	6
Figura N°3. Curva característica de un compresor .....	9
Figura N°4. Curva característica de una turbina .....	9
Figura N°5. Proceso de Expansión en una turbina .....	10
Figura N°6. Proceso de Compresión .....	12
Figura N°7. Proceso de compresión en pequeñas etapas .....	13
Figura N°8. Proceso de compresión. Definición de rendimiento politrópico .....	14
Figura N°8. Relación entre el rendimiento isentrópico (o global) y el rendimiento de un pequeño escalonamiento (o politrópico) de un compresor ( $\gamma=1.4$ ) .....	15
Figura N°9. Relación entre el rendimiento isentrópico (o global) y el rendimiento de un pequeño escalonamiento (o politrópico) de un compresor ( $\gamma=1.4$ ) .....	16
Figura N°10. Diagrama de Mollier mostrando el proceso de expansión dividido en un número de pequeños escalonamientos .....	17
Figura N°11. Diagrama de Mollier para el proceso a través de una tobera .....	18
Figura N°12. Diagrama de Mollier para el proceso a través de un difusor .....	19
Figura N°13. Esquemas de difusores subsónicos .....	20
Figura N°14. Perfil aerodinámico .....	21
Figura N°15. Rejilla de álabes. Definición de ángulos y parámetros geométricos .....	22
Figura N°16. Fuerzas y triángulos de velocidades en una rejilla de álabes .....	23
Figura N°17. Fuerza de sustentación y arrastre .....	25
Figura N°18. Proyecciones de las fuerzas .....	25
Figura N°19. Diagramas de velocidad de una turbina axial .....	26
Figura N°20. Línea de corriente y velocidades en una turbomáquina .....	27
Figura N°21. Diagramas de velocidad superpuestos de una etapa normal de una turbina axial .....	28
Figura N°22. Diagramas de velocidad adimensionales de una etapa normal de una turbina axial .....	29
Figura N°23. Diagrama h-s de la etapa de una turbina .....	30
Figura N°24. Distribución de presión en una rejilla de una etapa de una turbina axial .....	33
Figura N°25. Correlación de Soderberg para los coeficientes de pérdidas en una turbina en función de la deflexión .....	34
Figura N°26. Esquema del canal interálabe .....	35

# 1. ANÁLISIS DIMENSIONAL

## Máquinas de Flujo Compresible

$\dot{m}$  Flujo de masa

$c$  Velocidad del Fluido

$a = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T}$  Velocidad del sonido

$a_{01}$  Velocidad del sonido de estancamiento en la entrada de la turbomáquina

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m} \left[ \underbrace{h_2 - h_1}_{\substack{\text{Energía} \\ \text{Estática}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2)}_{\substack{\text{Energía} \\ \text{Cinética}}} + \underbrace{g(z_2 - z_1)}_{\text{Cero para un gas}} \right]$$

$$h_2 + \frac{1}{2}c_2^2 = h_{02} \quad \text{Entalpía Total, Estancamiento ó Parada}$$

$$C_p T_2 + \frac{1}{2}c_2^2 = C_p T_{02} \Rightarrow T_{02} = T_2 + \frac{1}{2} \frac{c_2^2}{C_p}$$

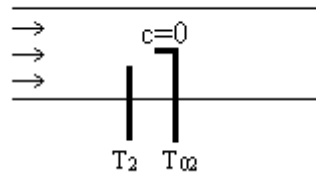


FIGURA N°1. Propiedad de Estancamiento

$\Delta h_{0s}$  Cambio de entalpía isentrópico

$\dot{Q} = 0$  Adiabático Isentrópico

$\eta$  Eficiencia

$P$  Potencia

$$-\frac{\dot{W}}{\dot{m}} = h_{02s} - h_{01} = \Delta h_{0s}$$

$$\Delta h_{0s} = F_1(\mu, \eta, D, \dot{m}, \rho_{01}, a_{01}, \gamma)$$

$$\eta = F_2(\mu, \eta, D, \dot{m}, \rho_{01}, a_{01}, \gamma)$$

$$P = F_3(\mu, \eta, D, \dot{m}, \rho_{01}, a_{01}, \gamma)$$

Aplicando el Teorema  $\pi$

Propiedad/Unidades	M	L	T
$\rho_{01}$	M	$L^{-3}$	
N (rpm)			$T^{-1}$
$\mu$	M	$L^{-1}$	$T^{-1}$
$a_{01}$		L	$T^{-1}$
m	M		$T^{-1}$
$\Delta h_{01}$		$L^2$	$T^{-2}$
P	M	$L^2$	$T^{-3}$
D		L	
$\eta$			
$\gamma$			

Se seleccionaron las siguientes variables independientes:  $\rho_{01}$ , N y D (diámetro característico) y se aplicó el teorema  $\pi$

Como  $\rho_0$  y  $a_0$  varían a través de una turbomáquina se toma el valor de estas variables en la entrada

$$\frac{\Delta h_{0s}}{N^2 D^2} = f_1 \left[ \frac{\dot{m}}{\rho_{01} N D^3}, \frac{\rho_{01} N D^2}{\mu}, \frac{N D}{a_{01}}, \gamma \right]$$

$$\eta = f_2 \left[ \frac{\dot{m}}{\rho_{01} N D^3}, \frac{\rho_{01} N D^2}{\mu}, \frac{N D}{a_{01}}, \gamma \right]$$

$$\frac{P}{\rho_{01} N^3 D^5} = f_3 \left[ \frac{\dot{m}}{\rho_{01} N D^3}, \frac{\rho_{01} N D^2}{\mu}, \frac{N D}{a_{01}}, \gamma \right]$$

$$\frac{\Delta h_{0s}}{N^2 D^2}, \eta, \frac{P}{\rho_{01} N^3 D^5} = f \left[ \frac{\dot{m}}{\rho_{01} N D^3}, \frac{\rho_{01} N D^2}{\mu}, \frac{N D}{a_{01}}, \gamma \right]$$

Tarea: Demostrar el resultado obtenido

$$\text{Simplificación: } \frac{\dot{m}}{\rho_{01} N D^3} = \frac{\dot{m}}{\rho_{01} a_{01} D^2 \left( \frac{N D}{a_{01}} \right)} \approx \frac{\dot{m}}{\rho_{01} a_{01} D^2} = \phi \text{ Coeficiente de Flujo}$$

↓  
Se elimina este término porque ya está considerado en el análisis

$$\frac{\Delta h_{0s}}{N^2 D^2}, \eta, \frac{P}{\rho_{01} N^3 D^5} = f \left[ \frac{\dot{m}}{\rho_{01} a_{01} D^2}, \frac{\rho_{01} N D^2}{\mu}, \frac{N D}{a_{01}}, \gamma \right] \quad \text{Válido para cualquier gas}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \phi & \#Re & \#Mach \end{array}$$

Para una maquina que utiliza un gas perfecto se utiliza un conjunto diferente de relaciones funcionales

Consideremos un compresor adiabático:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m} \left[ h_2 - h_1 + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) \right] \Rightarrow \dot{Q} - \dot{W} = \dot{m} [h_{02} - h_{01}]$$

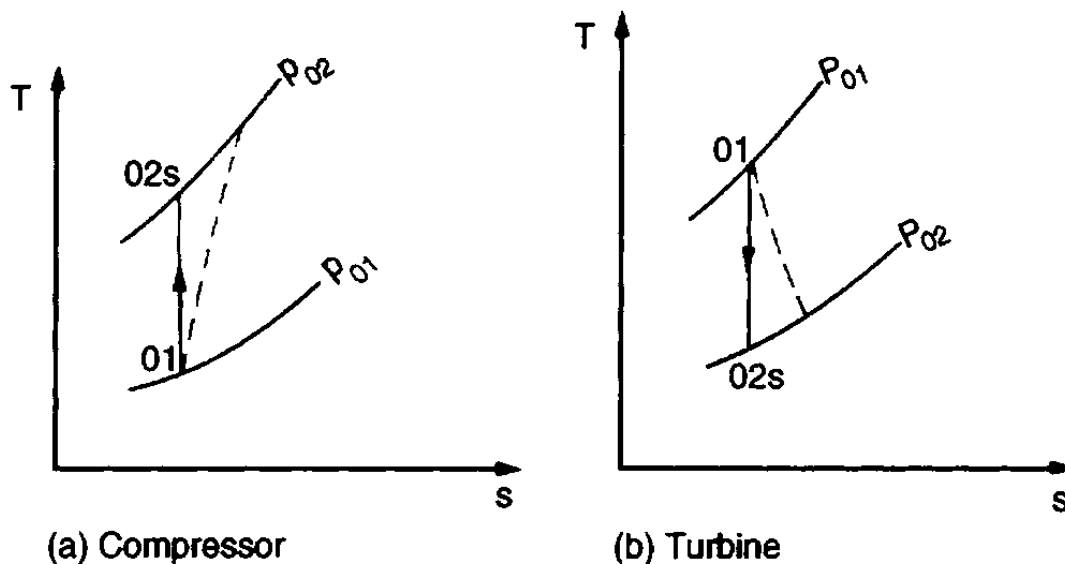


Figura N°2. Variación adiabática ideal de las condiciones de parada a lo largo de una turbomáquina

$$-\dot{W} = \dot{m} [h_{02} - h_{01}] \quad \text{Adiabático}$$

$$-\dot{W}_s = \dot{m} [h_{02s} - h_{01}] \quad \text{Isentrópico}$$

Si suponemos  $h = C_p T$  se obtiene:

$$-\dot{W}_s = \dot{m} C_p [T_{02s} - T_{01}]$$

Nota: La relación  $P_0 = P + \frac{1}{2} \rho c^2$  es una relación para flujo incompresible y por lo tanto no se puede usar para el análisis de la turbomáquinas

Gas ideal ó perfecto:  $\frac{P}{\rho} = RT$

Procesos adiabático isentrópico:  $\frac{P}{\rho^\gamma} = ctte$

$$T = \frac{P}{\rho R} \Rightarrow \frac{T_{02s}}{T_{01}} = \frac{\frac{P_{02}}{\rho_{01}}}{\frac{P_{01}}{\rho_{01}}} \quad \text{y usando } \rho = \frac{P}{ctte}$$

$$\frac{T_{02s}}{T_{01}} = \frac{\frac{P_{02}}{P_{01}^{1/\gamma}}}{\frac{P_{01}}{P_{01}^{1/\gamma}}} = \left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Rightarrow \frac{T_{02s}}{T_{01}} = \left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Rightarrow \frac{T_{01}}{T_1} = \left(\frac{P_{01}}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Esta propiedad se puede aplicar entre dos temperaturas cualesquiera que se encuentren en la misma línea isentrópica

$$-\dot{W}_s = \dot{m}C_p [T_{02s} - T_{01}] \Rightarrow \Delta h_{0s} = C_p [T_{02s} - T_{01}] = C_p T_{01} \left[ \frac{T_{02s}}{T_{01}} - 1 \right] = C_p T_{01} \left[ \left( \frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{C_p}{C_v} = \gamma \\ R = C_p - C_v \end{array} \right\} C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

$$\Delta h_{0s} = C_p T_{01} \left[ \left( \frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] = \frac{\gamma R T_{01}}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] = \frac{a_{01}^2}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

$$\frac{\Delta h_{0s}}{a_{01}^2} = \frac{1}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta h_{0s}}{N^2 D^2} = f \left( \frac{P_{02}}{P_{01}} \right)$$

El parámetro adimensional obtenido anteriormente es función de la relación de presiones ya que:

$$\frac{\Delta h_{0s}}{N^2 D^2} \approx \frac{\Delta h_{0s}}{N^2 D^2} \left( \frac{ND}{a_{01}} \right)^2 \approx \frac{\Delta h_{0s}}{a_{01}^2}$$

Para el coeficiente de flujo:

$$\phi = \frac{\dot{m}}{\rho_{01} a_{01} D^2} = \frac{\dot{m} R T_{01}}{P_{01} \sqrt{\gamma R T_{01}} D^2} = \frac{\dot{m} \sqrt{R T_{01}}}{D^2 P_{01} \sqrt{\gamma}}$$

Usando la ecuación de gas ideal y la ecuación de la velocidad del sonido

Para la potencia

$$\hat{P} = \frac{P}{\rho_{01} N^3 D^5} = \frac{\dot{m} C_p \Delta T_0}{\rho_{01} (D^2) (ND) (ND)^2}, \quad \dot{m} = \rho \cdot \text{Area} \cdot \text{Velocidad}$$

$\downarrow \quad \downarrow$   
 Área Velocidad

$$\hat{P} = \frac{C_p \Delta T_0}{(ND)^2} \approx \frac{C_p \Delta T_0}{(ND)^2} \left( \frac{ND}{a_{01}} \right)^2 \approx \frac{\left( \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \right) \Delta T_0}{\gamma R T_{01}} \approx \frac{\Delta T_0}{T_{01}}$$

Finalmente se obtiene:

Parámetros adimensionales para un gas perfecto

$$\frac{P_{02}}{P_{01}}, \eta, \frac{\Delta T_0}{T_{01}} = f \left[ \frac{\dot{m} \sqrt{RT_{01}}}{D^2 P_{01} \sqrt{\gamma}}, \frac{\rho_{01} ND^2}{\mu}, \frac{ND}{\sqrt{\gamma RT_{01}}}, \gamma \right]$$

Para una misma máquina que opera con #Re bajos y un mismo fluido se puede realizar una simplificación de los parámetros adimensionales:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}}, \eta, \frac{\Delta T_0}{T_{01}} = f \left[ \frac{\dot{m} \sqrt{T_{01}}}{P_{01}}, \frac{ND}{\sqrt{T_{01}}} \right]$$



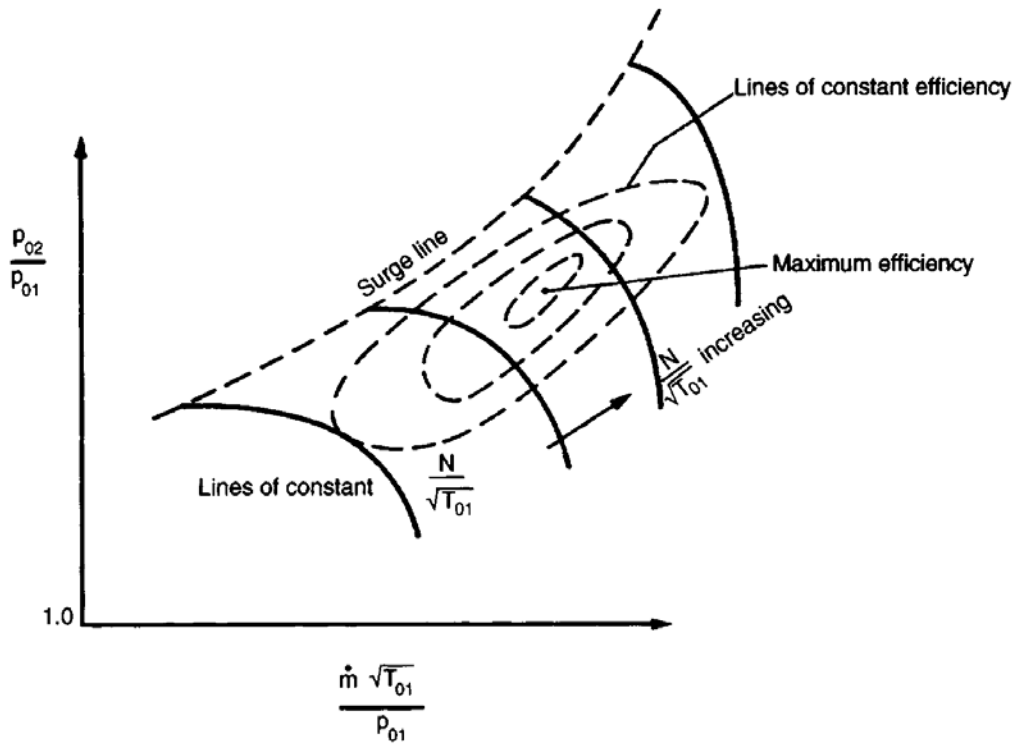


Figura N°3. Curva característica de un compresor

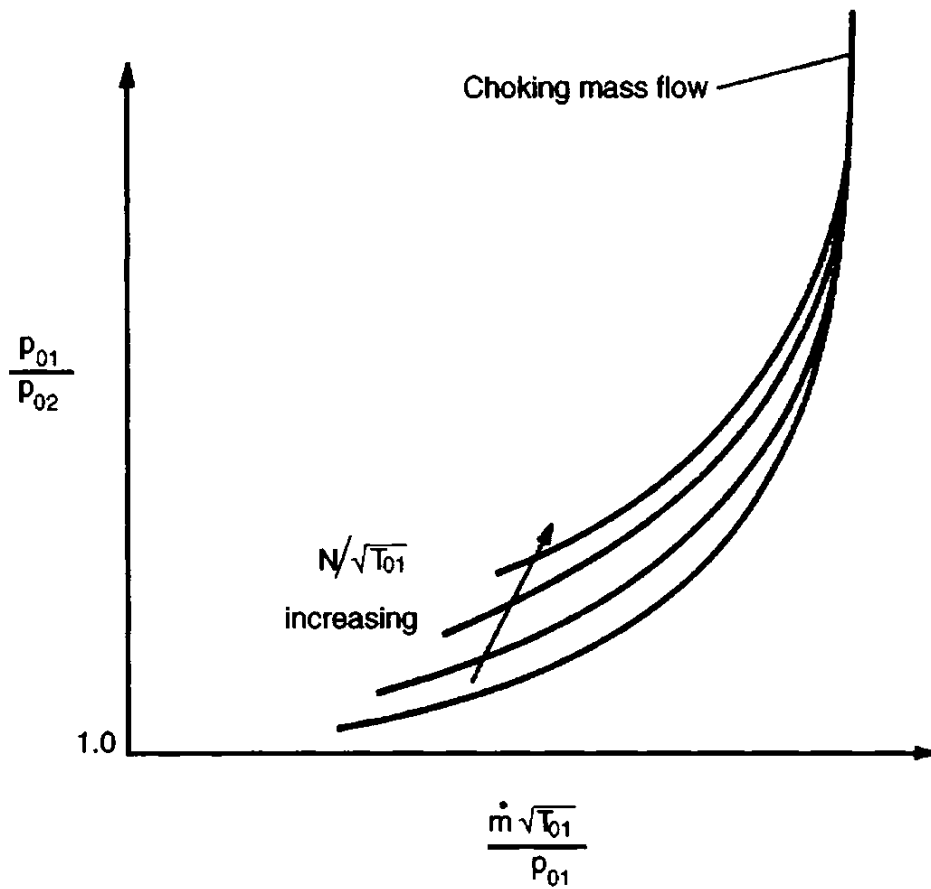


Figura N°4. Curva característica de una turbina

## 2. DEFINICIONES DE RENDIMIENTO O EFICIENCIA

### 2.1. TURBINA

#### Rendimiento o eficiencia global

$$\eta_0 = \frac{\text{Energía Mecánica disipada acoplamiento eje / tiempo}}{\text{Máxima diferencia de energía disponible en el fluido/tiempo}}$$

#### Rendimiento adiabático o hidráulico

$$\eta_t = \frac{\text{Energía Mecánica suministrada al rotor / tiempo}}{\text{Máxima diferencia de energía disponible en el fluido/tiempo}}$$

$$\dot{W}_{real} = \dot{m}[h_{01} - h_{02}] = \dot{m}\Delta h_0$$

$$\dot{W}_{max} = \dot{m}[h_{01} - h_{02s}] = \dot{m}\Delta h_{0s}$$

$$\eta_t = \frac{\dot{W}_{real}}{\dot{W}_{max}} = \frac{\Delta h_0}{\Delta h_{0s}} = \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{02s}}$$

$$\eta_0 = \frac{\text{Potencia eje}}{\dot{m}\Delta h_{0s}}$$

#### Rendimiento Mecánico

$$\eta_m = \frac{\eta_0}{\eta_t}$$

$$\eta_m = \frac{\text{Energía Mecánica disipada acoplamiento eje / tiempo}}{\text{Energía Mecánica suministrada al rotor / tiempo}}$$

95% Maquinas pequeñas

99% Máquinas grandes y medianas

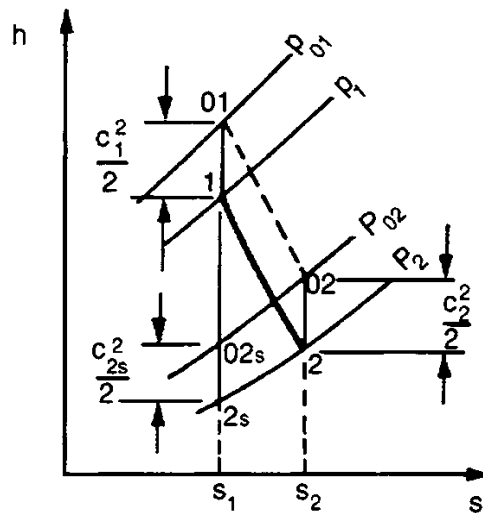


Figura N°5. Proceso de Expansión en una turbina

Si se puede aprovechar la energía cinética en la salida de la turbina se define el **rendimiento total a total  $\eta_{tt}$**

$$\eta_{tt} = \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{02s}} = \frac{(h_1 + \frac{1}{2}c_1^2) - (h_2 + \frac{1}{2}c_2^2)}{(h_1 + \frac{1}{2}c_1^2) - (h_{2s} + \frac{1}{2}c_{2s}^2)}$$

$$c_2 > c_{2s} \approx c_2 \cong c_{2s}$$

$$c_1 = c_2 \text{ (es frecuente)}$$

$$\eta_{tt} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2s}}$$

Si no se aprovecha la energía cinética del fluido en la salida de la turbina el **rendimiento adiabático es total a estático  $\eta_{ts}$**

$$\eta_{ts} = \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{02s} + \frac{1}{2}c_{2s}^2} = \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{2s}} = \frac{(h_1 + \frac{1}{2}c_1^2) - (h_2 + \frac{1}{2}c_2^2)}{(h_1 + \frac{1}{2}c_1^2) - (h_{2s} + \frac{1}{2}c_{2s}^2) + \frac{1}{2}c_{2s}^2}$$

$$c_1 = c_2 \text{ (es frecuente)}$$

$$\eta_{ts} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2s} + \frac{1}{2}c_2^2}$$

## 2.2. COMPRESOR

### Rendimiento o eficiencia global

$$\eta_{0c} = \frac{\text{Energía mínima necesaria para comprimir de P1 a P2 / tiempo}}{\text{Energía suministrada en el acoplamiento / tiempo}}$$

### Rendimiento adiabático o hidráulico

$$\eta_{tc} = \frac{\text{Energía mínima necesaria para comprimir de P1 a P2 / tiempo}}{\text{Energía suministrada por el rotor al fluido / tiempo}}$$

$$\dot{W}_{real} = \dot{m}[h_{02} - h_{01}] = \dot{m}\Delta h_0$$

$$\dot{W}_{min} = \dot{m}[h_{02} - h_{01s}] = \dot{m}\Delta h_{0s}$$

$$\eta_{tc} = \frac{\dot{W}_{min}}{\dot{W}_{real}} = \frac{\Delta h_{0s}}{\Delta h_0} = \frac{h_{02s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}}$$

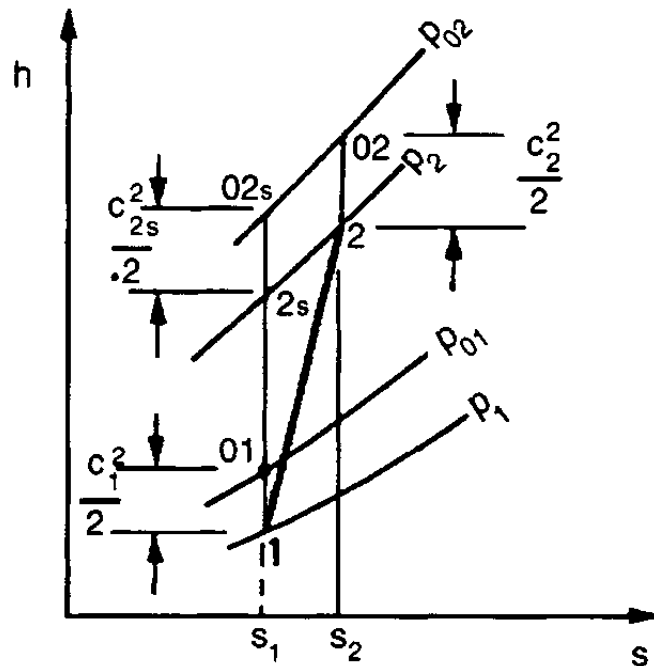


Figura N°6. Proceso de Compresión

Si  $c_1=c_2$

$$\eta_c = \frac{h_{02s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}} = \frac{(h_{2s} + \frac{1}{2}c_{2s}^2) - (h_1 + \frac{1}{2}c_1^2)}{(h_2 + \frac{1}{2}c_2^2) - (h_1 + \frac{1}{2}c_1^2)} = \frac{h_{2s} - h_1}{h_2 - h_1}$$

#### Rendimiento Mecánico

$$\eta_m = \frac{\eta_{0c}}{\eta_{tc}}$$

$$\eta_m = \frac{\text{Energía suministrada por el rotor al fluido/ tiempo}}{\text{Energía suministrada al acoplamiento / tiempo}}$$

**Rendimiento Politrópico:** infinito número de etapas muy pequeñas de igual rendimiento

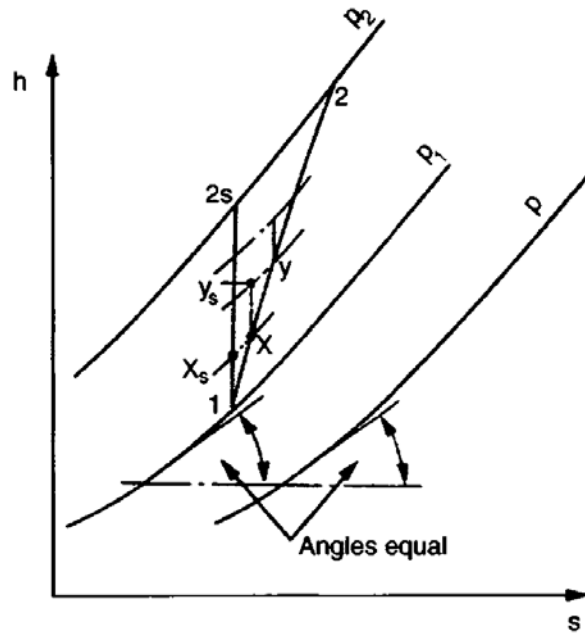


Figura N°7. Proceso de compresión en pequeñas etapas

$Tds = dh - vdp$  Para un proceso a presión constante

$$\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p = T$$

Sobre una línea isentrópica las pendientes de las líneas de Presión constante van aumentando si nos movemos desde abajo hacia arriba.

$$\eta_p = \frac{\Delta \dot{W}_{\min}}{\Delta \dot{W}} = \frac{h_{xs} - h_1}{hx - h_1} = \frac{h_{ys} - hx}{hy - hx} = \dots\dots\dots$$

Como todas las etapas tienen el mismo rendimiento

$$\eta_p = \frac{\sum \Delta \dot{W}_{\min}}{\sum \Delta \dot{W}}$$

$$\sum \Delta \dot{W} = (hx - h_1) + (hy - hx) + \dots\dots\dots = h_2 - h_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_p = \frac{(h_{xs} - h_1) + (h_{ys} - hx) + \dots\dots\dots}{h_2 - h_1} \\ \eta_c = \frac{h_{2s} - h_1}{h_2 - h_1} \text{ Para } c_1 = c_2 \end{array} \right.$$

Debido a la divergencia de las líneas de presión constante (ver última figura) se cumple:

$$(h_{xs} - h_1) + (h_{ys} - h_x) + \dots > h_{2s} - h_1 \quad \text{Por lo tanto}$$

$$\eta_p > \eta_c$$

Para un proceso de compresión el rendimiento adiabático de la máquina es menor que el rendimiento del pequeño escalonamiento.

### Rendimiento del pequeño escalonamiento para un gas perfecto

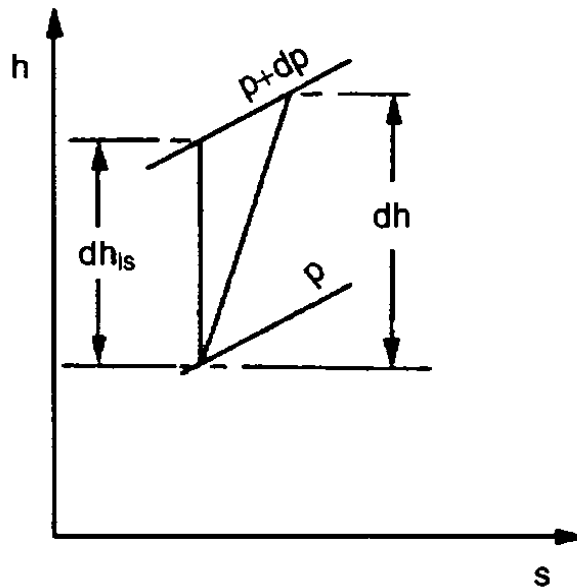


Figura N°8. Proceso de compresión. Definición de rendimiento politrópico

$$\eta_p = \frac{dh_{is}}{dh}$$

$$Tds = 0 = dh_{is} - v dP$$

$$v = \frac{RT}{P} \Rightarrow dh_{is} = \frac{RT dP}{P}$$

$$dh = C_p dT = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} dT$$

$$\eta_p = \frac{RT dP}{\frac{\gamma R}{\gamma - 1} P dT} \Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma \eta_p} \frac{dP}{P} \Rightarrow \ln T_2 - \ln T_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma \eta_p} (\ln P_2 - \ln P_1)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma \eta_p}}$$



También se pueden aplicar condiciones de estancamiento en esta propiedad

Si se utiliza una línea isentrópica  $\eta_p = 1$

Ahora aplicamos esta propiedad a la definición de eficiencia del compresor

$$\eta_c = \frac{h_{2s} - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{T_{2s} - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{\frac{T_{2s}}{T_1} - 1}{\frac{T_2}{T_1} - 1} \Rightarrow$$

$$\eta_c = \frac{\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma \cdot \eta_p}} - 1}$$

Se pueden usar condiciones estáticas o de estancamiento

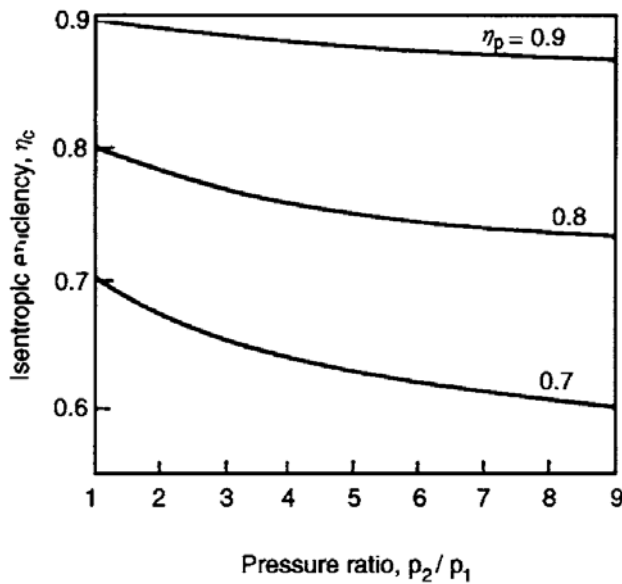


Figura N°8. Relación entre el rendimiento isentrópico (o global) y el rendimiento de un pequeño escalonamiento (o politrópico) de un compresor ( $\gamma = 1.4$ )

Como se observa en la gráfica si se aumenta la relación de presión en un compresor manteniendo el rendimiento politrópico constante la eficiencia del compresor disminuye

**Rendimiento politrópico de una turbina:** De manera análoga al compresor se obtiene

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{(\gamma-1)\eta_p}{\gamma}}$$

$$\eta_c = \frac{1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{(\gamma-1)\eta_p}{\gamma}}}{1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

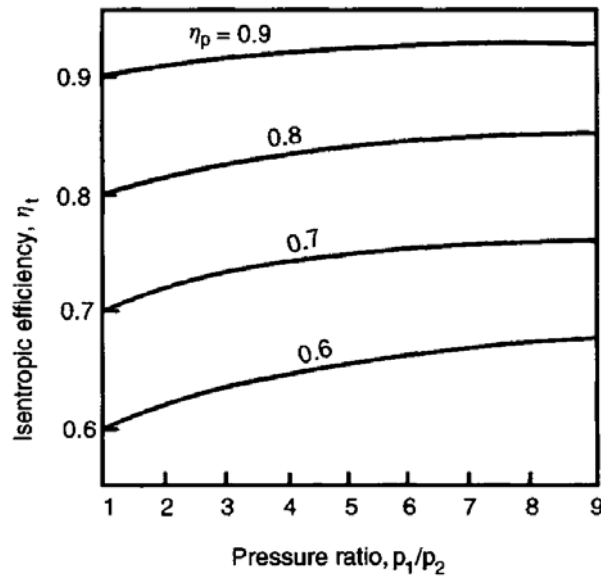


Figura N°9. Relación entre el rendimiento isentrópico (o global) y el rendimiento de un pequeño escalonamiento (o politrópico) de un compresor ( $\gamma = 1.4$ )

Como se observa en la gráfica si se aumenta la relación de presión en una turbina manteniendo el rendimiento politrópico constante la eficiencia de la turbina aumenta

**Factor de Recalentamiento o Recuperación:** Se aplica en la práctica de las turbinas de vapor como una medida de la ineficiencia de la expansión completa



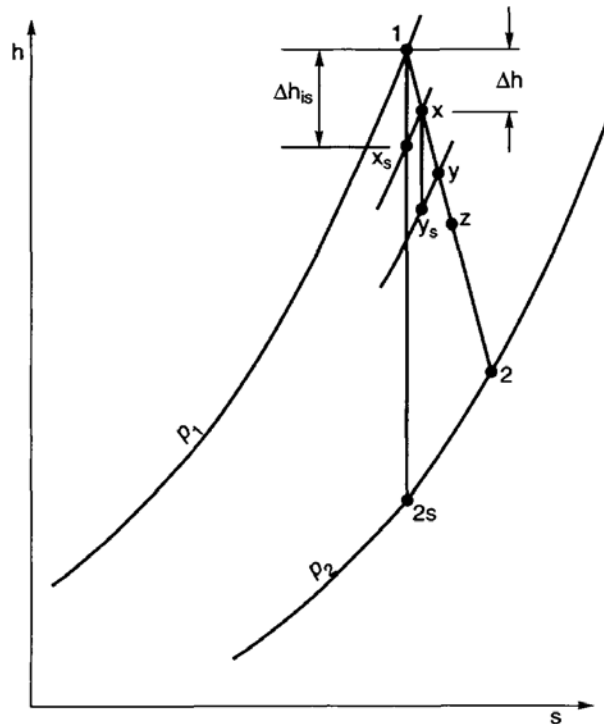


Figura N°10. Diagrama de Mollier mostrando el proceso de expansión dividido en un número de pequeños escalonamientos

$$R_h = \frac{(h_1 - h_{xs}) + (h_x - h_{ys}) + \dots}{h_1 - h_{2s}} = \frac{\sum \Delta h_{is}}{h_1 - h_{2s}}$$

$$1.03 < R_h < 1.08$$

$$\eta_t = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2s}} = \left( \frac{h_1 - h_2}{\sum \Delta h_{is}} \right) \left( \frac{\sum \Delta h_{is}}{h_1 - h_{2s}} \right) = \eta_p R_h \quad \text{Eficiencia de una turbina}$$

$$\eta_t = \eta_p R_h$$

### 2.3. RENDIMIENTO O EFICIENCIA DE UNA TOBERA

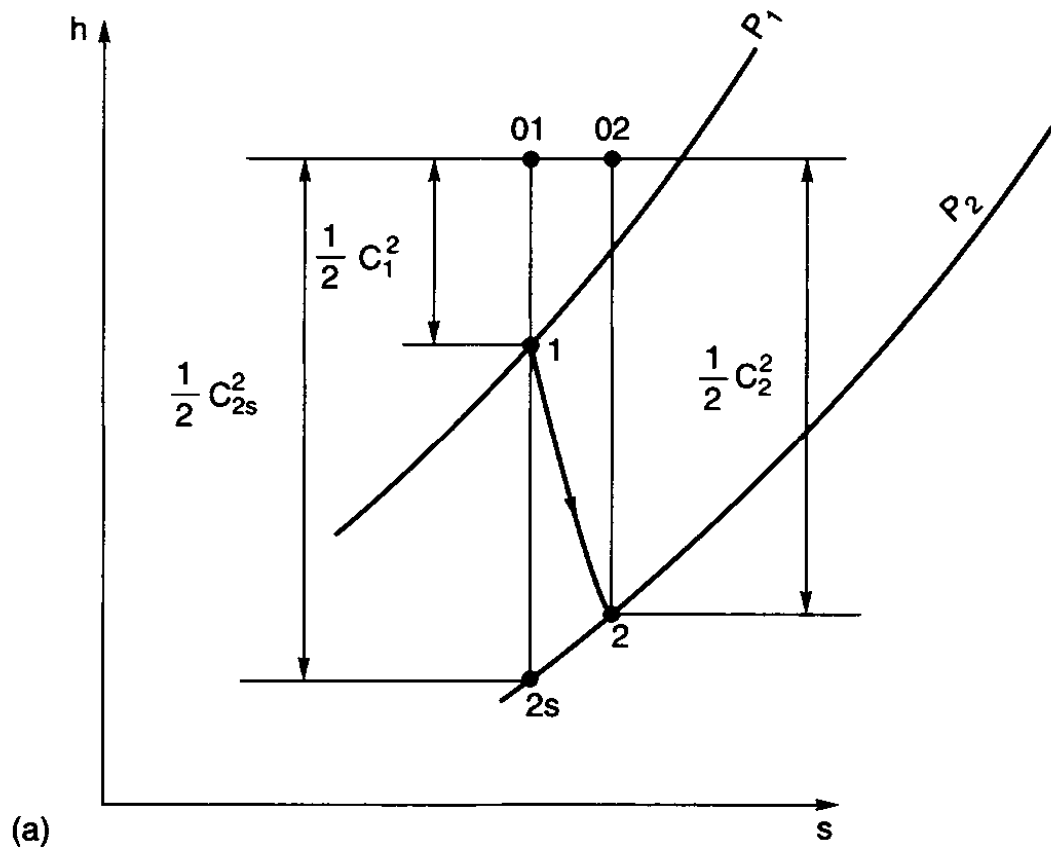


Figura N°11. Diagrama de Mollier para el proceso a través de una tobera

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m} \left[ (h_2 - h_1) + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) \right]$$

Tobera:  $Q=0$  y  $W=0$

$$h_2 + \frac{1}{2} c_2^2 = h_1 + \frac{1}{2} c_1^2 \Rightarrow h_{01} = h_{02}$$

Eficiencia de una tobera

$$\eta_n = \frac{\frac{1}{2} c_2^2}{\frac{1}{2} c_{2s}^2} = \frac{h_{01} - h_2}{h_{01} - h_{2s}}$$

## 2.4. RENDIMIENTO O EFICIENCIA DE UN DIFUSOR

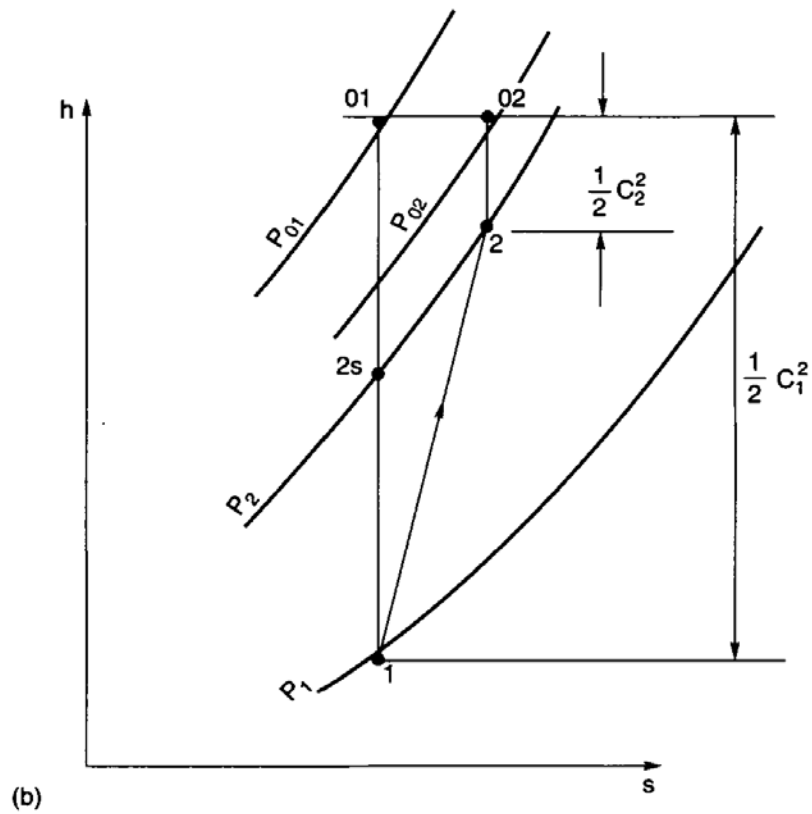


Figura N°12. Diagrama de Mollier para el proceso a través de un difusor

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m} \left[ (h_2 - h_1) + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) \right]$$

Difusor:  $Q=0$  y  $W=0$

$$h_2 + \frac{1}{2} c_2^2 = h_1 + \frac{1}{2} c_1^2 \Rightarrow h_{01} = h_{02}$$

Eficiencia de un difusor

$$\eta_d = \frac{h_{2s} - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{c_1^2 - c_{2s}^2}{c_1^2 - c_2^2}$$

Diseño óptimo para un difusor recto

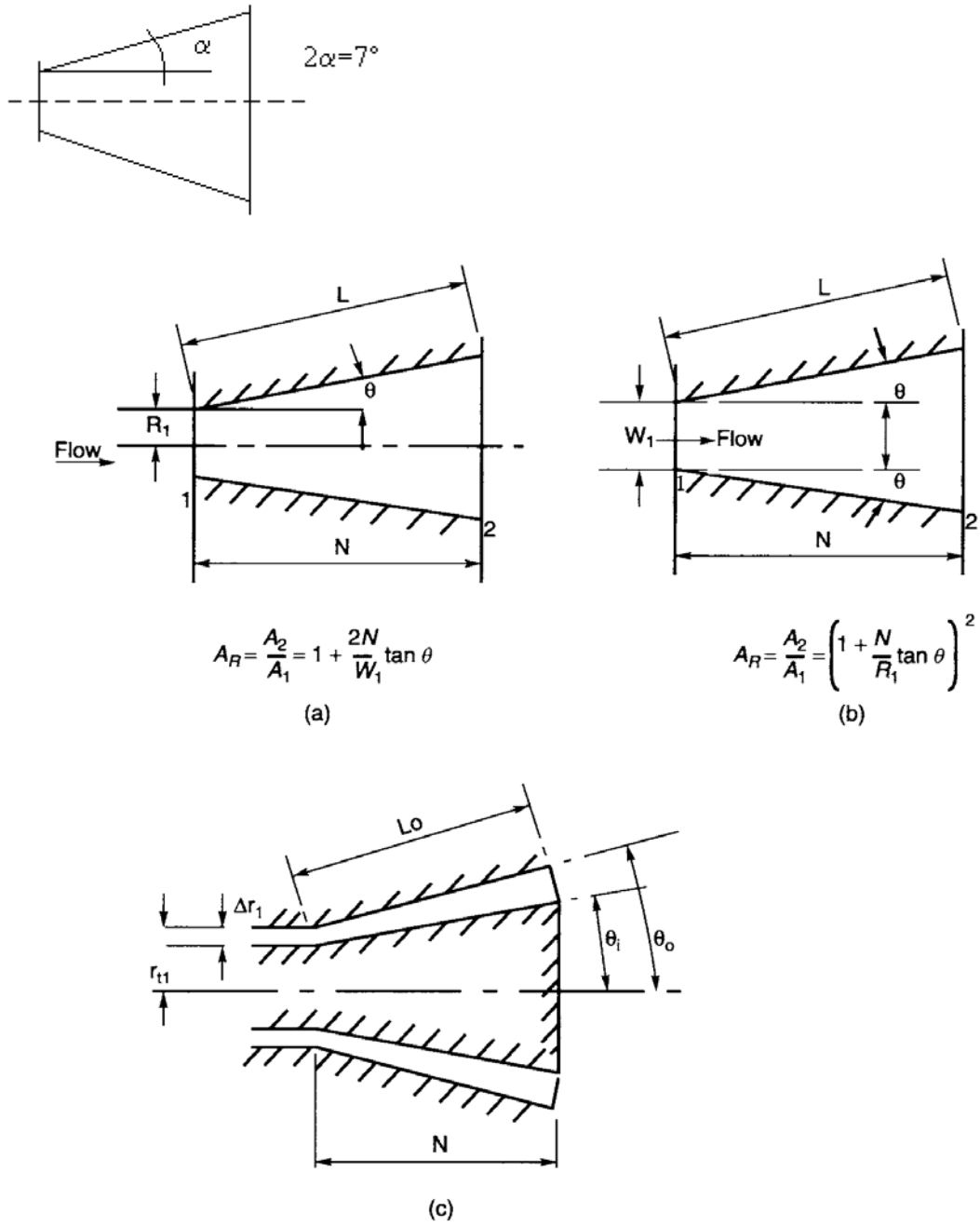


Figura N°13. Esquemas de difusores subsônicos

### 3. FLUJO EN REJILLAS DE ALABES EN CASCADAS (flujo bidimensional)

#### Métodos matemáticos

- Flujo potencial
- Transformación conforme

#### Métodos experimentales

- Túnel de viento → rejillas de alabes

#### Métodos de simulación computacional

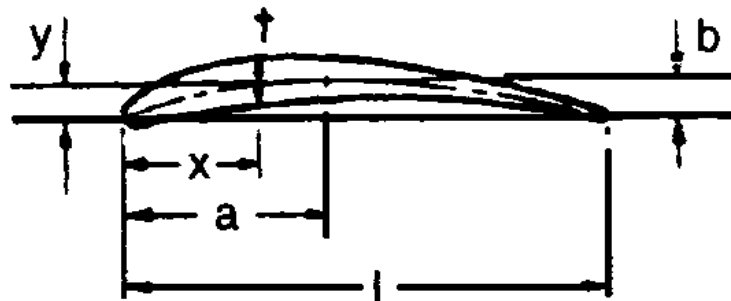


Figura N°14. Perfil aerodinámico

a , b puntos de máxima curvatura

l = cuerda

t = espesor

La línea de centros o de curvatura puede ser circular, parabólica ó otro tipo de curva

Tablas de perfiles normalizados →  $y/l$ ,  $t/l$  en función de  $x/l$

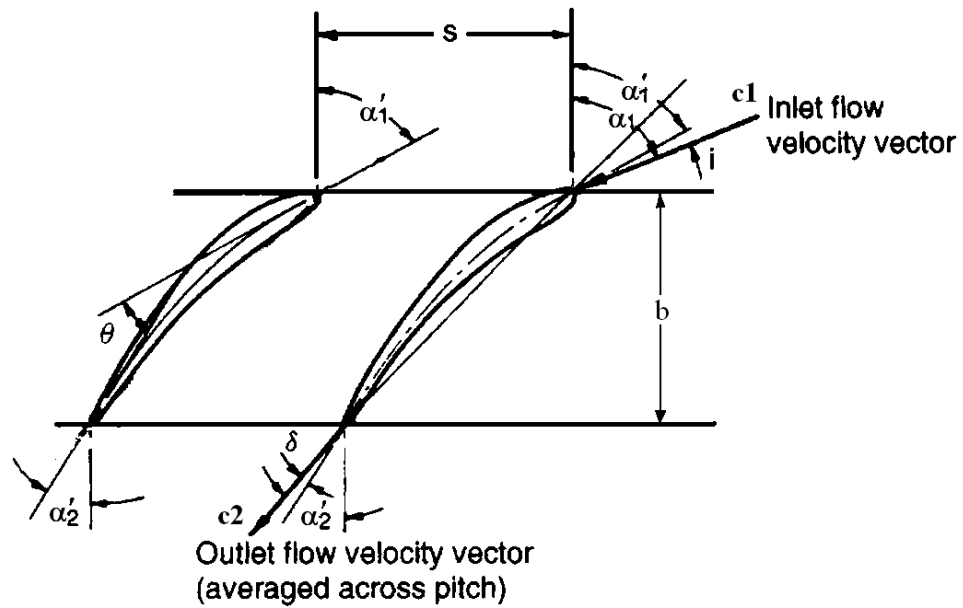


Figura N°15. Rejilla de álabes. Definición de ángulos y parámetros geométricos

b cuerda axial

l cuerda

$\alpha_1'$  = ángulo tangente línea de centros en la entrada

$\alpha_2'$  = ángulo tangente línea de centros en la salida

$\alpha_1$  = ángulo del fluido en la entrada

$\alpha_2$  = ángulo del fluido en la salida

$i = \alpha_1 - \alpha_1'$  Incidencia

S = Paso (distancia entre dos alabes)

$\varepsilon = \alpha_1 - \alpha_2$  Deflexión

$\theta = \alpha_1' - \alpha_2'$  Curvatura

$\delta = \alpha_2 - \alpha_2'$  Desviación

**Análisis de fuerzas en cascadas:** En el siguiente análisis se supone que el fluido es incompresible y el flujo estacionario

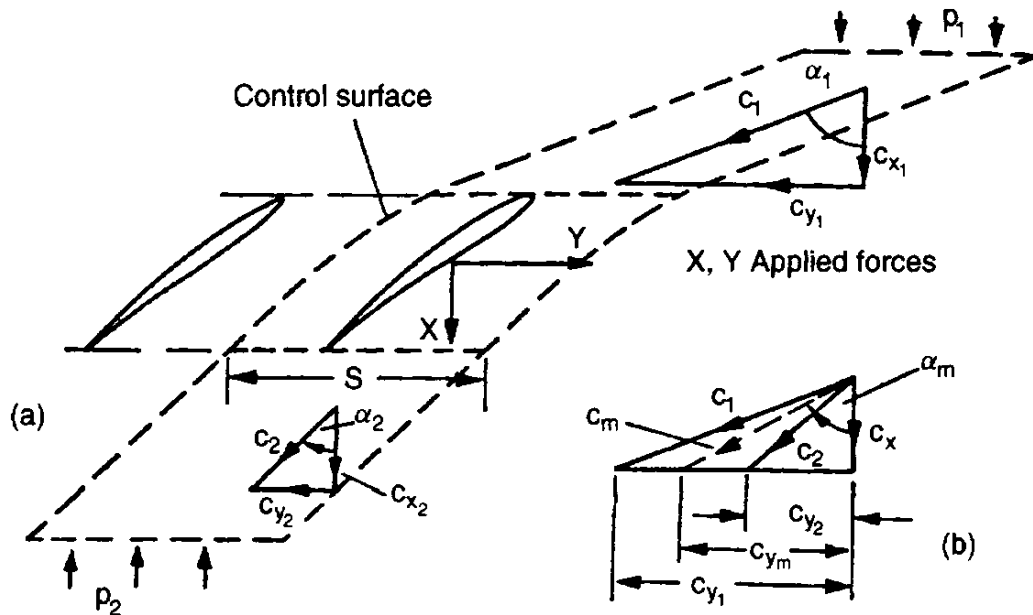


Figura N°16. Fuerzas y triángulos de velocidades en una rejilla de álabes

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 c_1 \cos \alpha_1 = \rho_2 A_2 c_2 \cos \alpha_2$$

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 c_{x1} = \rho_2 A_2 c_{x2}$$

$$\rho_1 = \rho_2$$

$$A_1 = A_2 = S \times 1$$

$$c_{x1} = c_1 \cos \alpha_1$$

$$c_{x2} = c_2 \cos \alpha_2$$

$$c_{y1} = c_1 \tan \alpha_1$$

$$c_{y2} = c_2 \tan \alpha_2$$

$$c_{x1} = c_{x2} = c_x$$

### Fuerzas

X y Y son las fuerzas que ejercen los alabes sobre el fluido

$$X = (P_2 - P_1)S \times 1$$

$$Y = \rho S C_x (C_{y1} - C_{y2})$$

$$Y = \rho S C_x^2 (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2)$$

**Pérdidas de energía:** Un fluido real que cruza la cascada experimenta una pérdida de presión total  $\Delta P_0$  debido a la fricción superficial y a efectos afines

$$P_{01} - P_{02} = \Delta P_0 = \left( P_1 + \frac{1}{2} \rho c_1^2 \right) - \left( P_2 + \frac{1}{2} \rho c_2^2 \right)$$

$$\frac{\Delta P_0}{\rho} = \left( \frac{P_1 - P_2}{\rho} \right) + \frac{1}{2} (c_1^2 - c_2^2)$$

$$c_1^2 - c_2^2 = (c_{y1}^2 + c_{x1}^2) - (c_{y2}^2 + c_{x2}^2) = (c_{y1}^2 - c_{y2}^2) = (c_{y1} - c_{y2})(c_{y1} + c_{y2})$$

$$\frac{\Delta P_0}{\rho} = \left( -\frac{X}{\rho S} \right) + \frac{1}{2} (c_{y1} - c_{y2})(c_{y1} + c_{y2})$$

Multiplica y divide por  $\rho C_x S$

$$\frac{\Delta P_0}{\rho} = \left( -\frac{X}{\rho S} \right) + \frac{1}{\rho S c_x} (c_{y1} + c_{y2}) \rho S c_x (c_{y1} - c_{y2}) \frac{1}{2}$$

$$\frac{c_{y1}}{c_x} = \tan \alpha_1$$

$$\frac{c_{y2}}{c_x} = \tan \alpha_2$$

$$\frac{\Delta P_0}{\rho} = -\frac{X}{\rho S} + \frac{1}{2 \rho S} (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2) Y$$

$$\tan \alpha_m = \frac{1}{2} (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2)$$

$$\boxed{\frac{\Delta P_0}{\rho} = \frac{1}{\rho S} (-X + Y \tan \alpha_m)}$$

**Coefficiente de pérdidas de Ptotal o de estancamiento**

$$\xi = \frac{\Delta P_0}{\frac{1}{2} \rho c_x^2}$$

$$\varpi = \frac{\Delta P_0}{\frac{1}{2} \rho c_1^2}$$

**Coefficiente de elevación de presión**

$$C_p = \frac{P_2 - P_1}{\frac{1}{2} \rho c_x^2} = \frac{X}{\frac{1}{2} \rho S c_x^2}$$

**Coefficiente de fuerza tangencial**

$$C_f = \frac{Y}{\frac{1}{2} \rho S c_x^2} = 2(\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2)$$

$$C_p = C_f \tan \alpha_m - \xi$$

**Sustentación y Resistencia**



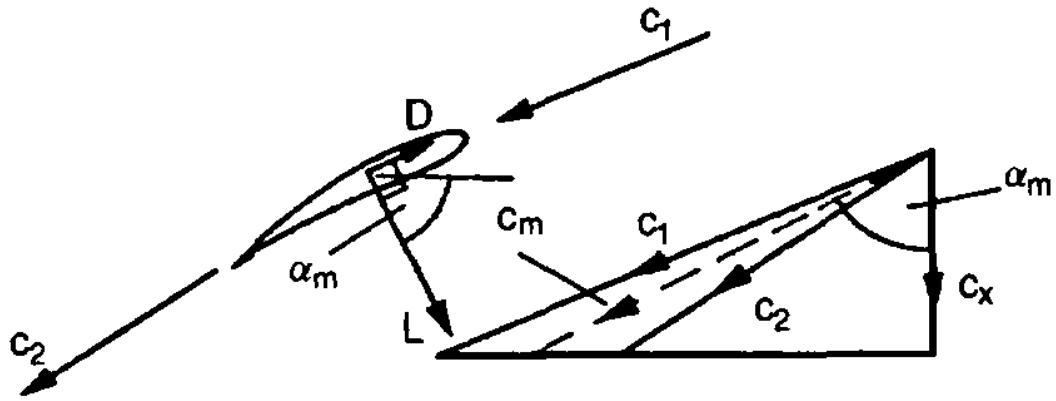


Figura N°17. Fuerza de sustentación y arrastre

$L$  = Fuerza de sustentación ;  $D$  = Fuerza de Arrastre

Fuerza Resultante  $L+D$  = Fuerza Resultante  $X + Y$

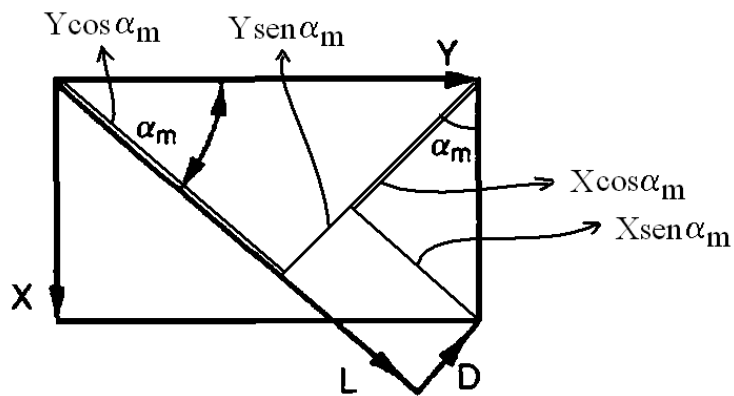


Figura N°18. Proyecciones de las fuerzas

$$L = X \text{sen} \alpha_m + Y \cos \alpha_m$$

$$D = Y \text{sen} \alpha_m - X \cos \alpha_m$$

$$D = \cos \alpha_m (Y \tan \alpha_m - X) = S \Delta P_0 \cos \alpha_m$$

$$L = (Y \tan \alpha_m - S \Delta P_0) \text{sen} \alpha_m + Y \cos \alpha_m$$

$$L = Y (\tan \alpha_m \text{sen} \alpha_m + \cos \alpha_m) - S \Delta P_0 \text{sen} \alpha_m$$

$$L = Y \sec \alpha_m - S \Delta P_0 \text{sen} \alpha_m$$

$$L = \rho S c_x^2 (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2) \sec \alpha_m - S \Delta P_0 \text{sen} \alpha_m$$

**Coefficiente de sustentación**

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho c_m^2 l \times 1}$$

**Coefficiente de arrastre**

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho c_m^2 l \times 1}$$

**4. TURBINAS AXIALES (flujo bidimensional)**

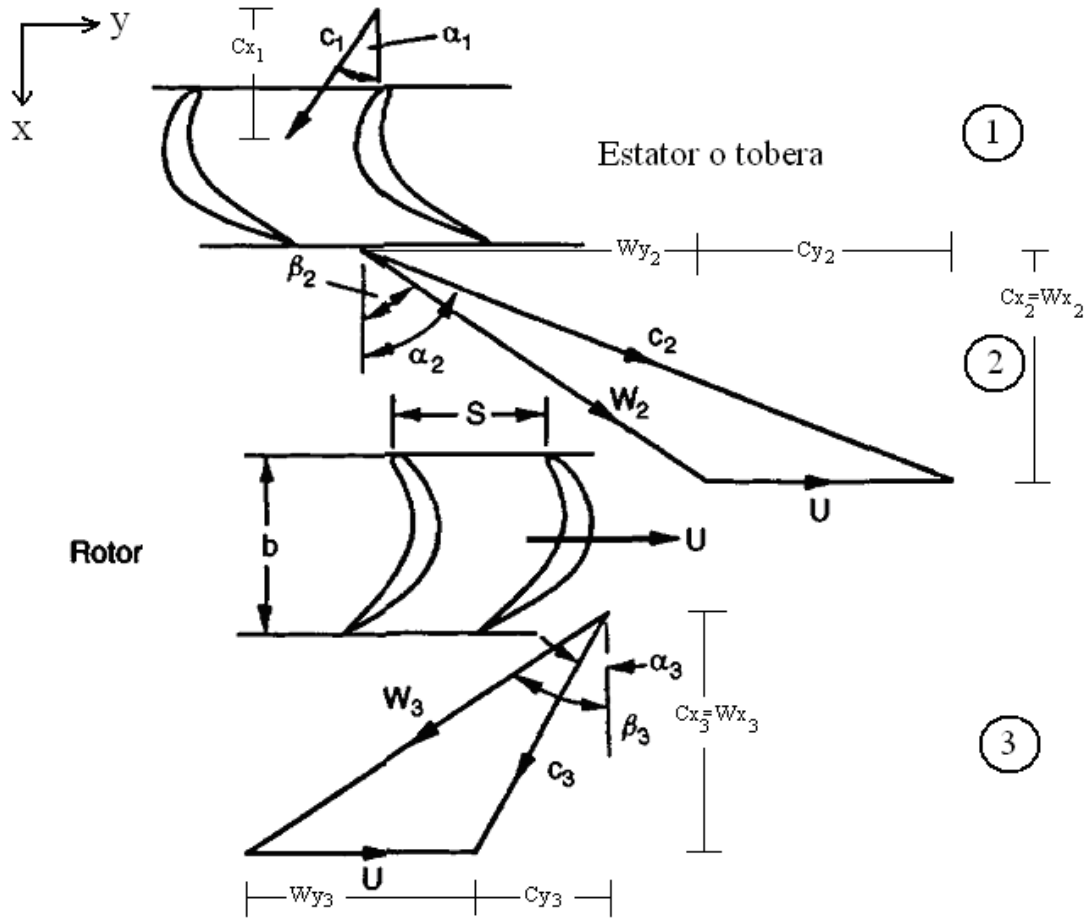


Figura N°19. Diagramas de velocidad de una turbina axial

**Velocidad del alabe**

$$U = \frac{\pi DN}{60} = \frac{2\pi RN}{60}$$

**Ecuación de continuidad**

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 C_{x1} = \rho_2 A_2 C_{x2} = \rho_3 A_3 C_{x3}$$

Para este curso  $\rightarrow c_{x1} = c_{x2} = c_{x3} = w_{x2} = w_{x3}$

$$\rho_1 A_1 = \rho_2 A_2 = \rho_3 A_3 = cte$$

Si  $c_2 = a_2 = \sqrt{\gamma RT_2}$  se alcanza la velocidad del sonido y el flujo se estrangula

### Tobera

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m} \left[ (h_2 - h_1) + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) \right] \quad \text{Tobera: } Q=0 \text{ y } W=0$$

$$h_2 + \frac{1}{2} c_2^2 = h_1 + \frac{1}{2} c_1^2 \Rightarrow h_{01} = h_{02} \quad \text{Se acelera el flujo}$$

### Rotor

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m} [h_{03} - h_{02}] \quad \text{Rotor: } Q=0$$

$$\dot{W} = \dot{m} [h_{02} - h_{03}] \quad \text{Como } h_{01} = h_{02} \Rightarrow \dot{W} = \dot{m} [h_{01} - h_{03}]$$

### Momento de la cantidad de movimiento

Empleando la segunda ley de Newton aplicada a los momentos de las fuerzas

$$\tau_A = m \frac{d}{dt} (Rc_y)$$

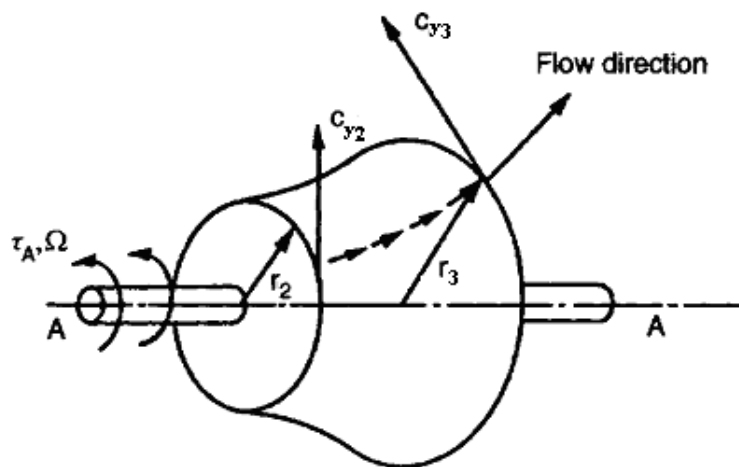


Figura N°20. Línea de corriente y velocidades en una turbomáquina

Para un volumen de control de una turbomáquina genérica se puede obtener la ley del momento de la cantidad de movimiento. Para flujo estacionario unidimensional:

$$\tau_A = \dot{m} (R_2 c_{y2} - R_3 c_{y3})$$

$$U = \frac{\pi DN}{60} = \frac{2\pi N}{60} R = \Omega R$$

$$\text{Potencia} = \tau_A \Omega = \dot{m} \Omega (R_2 c_{y2} - R_3 c_{y3}) = \dot{m} (U_2 c_{y2} - U_3 c_{y3})$$

$c_{y3}$  es usualmente negativo y en flujo bidimensional  $U_2 = U_3 = U$

$$\dot{W} = \dot{m}U(c_{y2} + c_{y3})$$

$$\dot{W} = \dot{m}[h_{01} - h_{03}] = \dot{m}U(c_{y2} + c_{y3})$$

$$\Delta h_0 = h_{01} - h_{03} = U(c_{y2} + c_{y3})$$

Si  $c_{x1} = c_{x2} = c_{x3} = w_{x2} = w_{x3}$  y  $U_2 = U_3 = U$  se pueden acoplar los triángulos de velocidades de la siguiente manera:

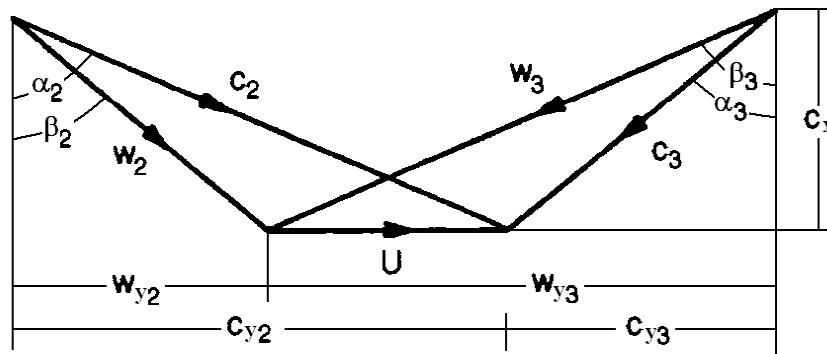


Figura N°21. Diagramas de velocidad superpuestos de una etapa normal de una turbina axial

### Coefficiente de flujo

$$\phi = \frac{C_x}{U}$$

### Análisis Dimensional

$$\frac{\Delta h_{0s}}{N^2 D^2}, \eta, \frac{P}{\rho_{01} N^3 D^5} = f \left[ \frac{\dot{m}}{\rho_{01} N D^3}, \frac{\rho_{01} N D^2}{\mu}, \frac{N D}{a_{01}}, \gamma \right]$$

$$\frac{\dot{m}}{\rho_{01} N D^3} = \frac{\dot{m}}{\rho_{01} D^2 N D} \approx \frac{\rho_{01} D^2 C_x}{\rho_{01} D^2 U} = \frac{C_x}{U} = \phi$$

### Coefficiente o factor de carga

$$\psi = \frac{\Delta W}{U^2}$$

### Análisis Dimensional

$$\frac{\Delta h_{0s}}{N^2 D^2}, \eta, \frac{P}{\rho_{01} N^3 D^5} = f \left[ \frac{\dot{m}}{\rho_{01} N D^3}, \frac{\rho_{01} N D^2}{\mu}, \frac{N D}{a_{01}}, \gamma \right] \quad \frac{\Delta h_{0s}}{N^2 D^2} \approx \frac{\Delta W}{U^2}$$

$$\Delta W = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = h_{01} - h_{03} = U(c_{y2} + c_{y3}) = Cp(T_{01} - T_{03}) = Cp\Delta T_0$$

$$\psi = \frac{U(c_{y2} + c_{y3})}{U^2} = \frac{(c_{y2} + c_{y3})}{U} = \frac{C_p \Delta T_0}{U^2}$$

**Triángulos unitarios:** Dividiendo los triángulos anteriores entre U obtenemos:

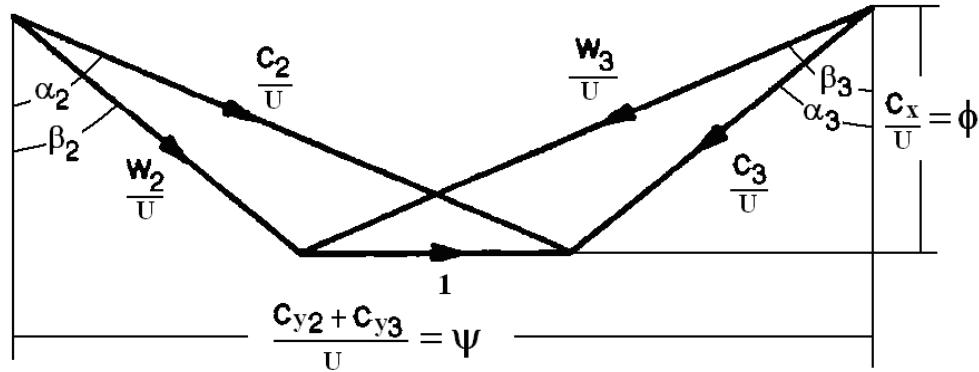


Figura N°22. Diagramas de velocidad adimensionales de una etapa normal de una turbina axial

### Rotor

$$\dot{W} = \dot{m}[h_{02} - h_{03}]$$

$$h_{02} - h_{03} = \left[ h_2 + \frac{1}{2} c_2^2 \right] - \left[ h_3 + \frac{1}{2} c_3^2 \right] = \left[ h_2 + \frac{1}{2} (c_{x2}^2 + c_{y2}^2) \right] - \left[ h_3 + \frac{1}{2} (c_{x3}^2 + c_{y3}^2) \right] = U(c_{y2} + c_{y3})$$

$$c_{x2} = c_{x3}$$

$$h_2 - h_3 + \frac{1}{2} (c_{y2}^2 + c_{y3}^2) = U(c_{y2} + c_{y3})$$

$$h_2 - h_3 + \frac{1}{2} (c_{y2} + c_{y3})(c_{y2} + c_{y3}) - U(c_{y2} + c_{y3}) = 0$$

$$h_2 - h_3 + \frac{1}{2} (c_{y2} + c_{y3})[c_{y2} - c_{y3} - 2U] = 0$$

$$h_2 - h_3 + \frac{1}{2} (c_{y2} + c_{y3})[(c_{y2} - U) - (c_{y3} + U)] = 0$$

Ver \_triángulos

$$c_{y2} - U = w_{y2}$$

$$c_{y3} + U = w_{y3}$$

$$c_{y2} + c_{y3} = w_{y2} + w_{y3}$$

$$h_2 - h_3 + \frac{1}{2} (w_{y2} + w_{y3})(w_{y2} - w_{y3}) = 0$$

$$h_2 - h_3 + \frac{1}{2} (w_{y2}^2 - w_{y3}^2) = 0$$

Sumo y resto  $\frac{1}{2} w_x^2$

$$h_2 - h_3 + \frac{1}{2}(w_2^2 - w_3^2) = 0$$

$$h_2 + \frac{1}{2}w_2^2 = h_3 + \frac{1}{2}w_3^2$$

$$h_{02r} = h_{03r}$$

Entalpía de estancamiento relativa

**Entonces**

Tobera:  $h_{01} = h_{02}$

Rotor:  $h_{02r} = h_{03r}$

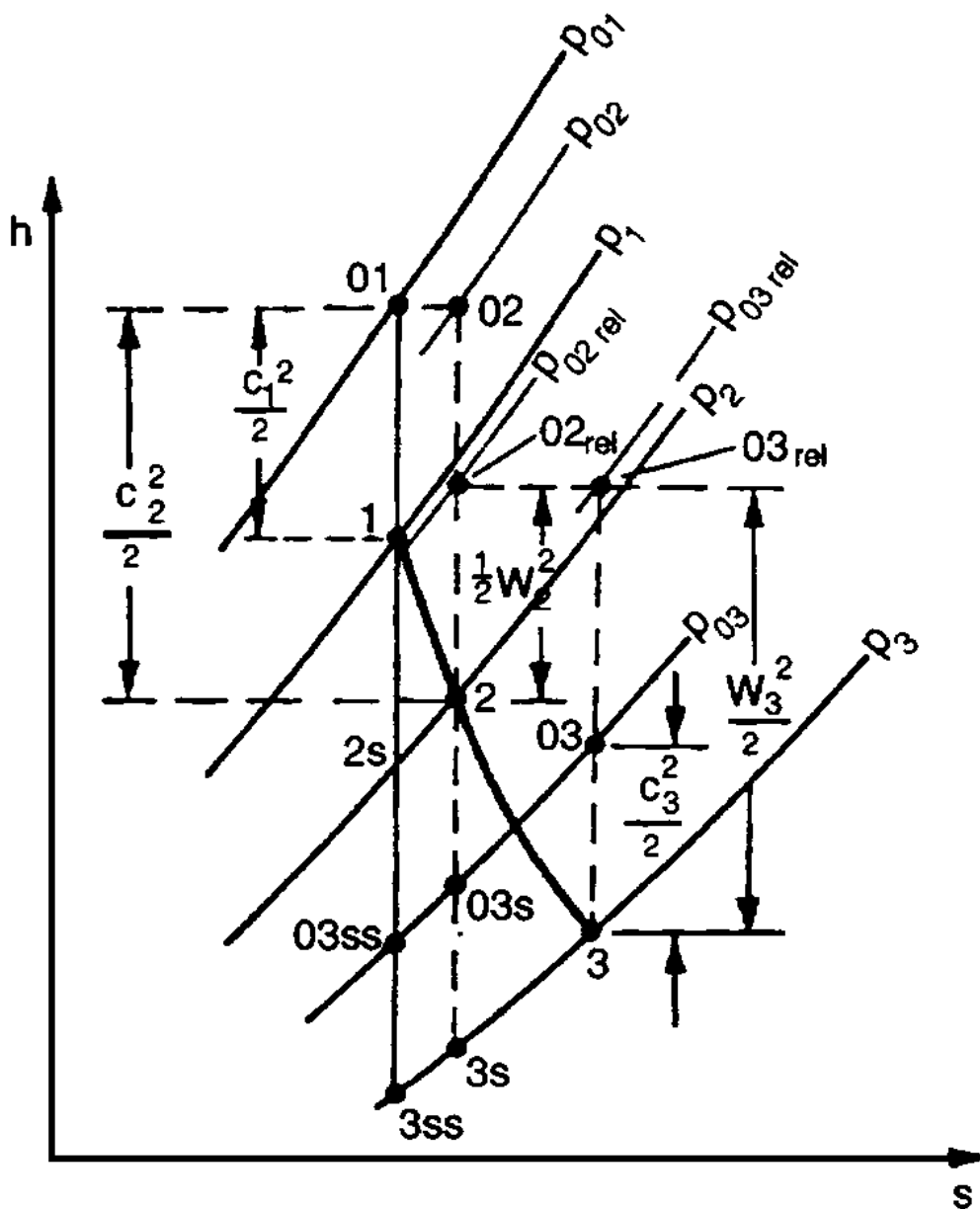


Figura N°23. Diagrama h-s de la etapa de una turbina

#### 4.1. RENDIMIENTO O EFICIENCIA DE UNA ETAPA DE TURBINA

$\eta_{tt} = \frac{\text{Trabajo real efectuado}}{\text{Trabajo real operando con los mismos niveles de presión}}$

$$\eta_{tt} = \frac{h_{01} - h_{03}}{h_{01} - h_{03ss}} = \frac{\Delta W}{\Delta W_{is}}$$

Etapa normal $c_1 = c_3$ $\alpha_1 = \alpha_3$	y se supone $c_3 = c_{3ss}$
---	-----------------------------

$$\eta_{tt}(\text{etapa\_normal}) = \frac{h_1 - h_3}{h_1 - h_{3ss}} = \frac{h_1 - h_3}{(h_1 - h_3) + (h_3 - h_{3s}) + (h_{3s} - h_{3ss})}$$

$$Tds = dh - v dP$$

$$dP = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial h}{\partial s} \right)_P = T \Rightarrow \Delta h = T \Delta s$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{3s} - h_{3ss} = T_3 (s_{3s} - s_{3ss}) \\ h_2 - h_{2s} = T_2 (s_2 - s_{2s}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_2 - h_{2s} = T_2 (s_2 - s_{2s}) \\ (s_{3s} - s_{3ss}) = (s_2 - s_{2s}) \Rightarrow \text{ver\_diagrama\_Mollier} \end{array} \right.$$

$(s_{3s} - s_{3ss}) = (s_2 - s_{2s}) \Rightarrow \text{ver\_diagrama\_Mollier}$

$$h_{3s} - h_{3ss} = \frac{T_3}{T_2} (h_2 - h_{2s})$$

$$\eta_{tt}(\text{etapa\_normal}) = \frac{h_1 - h_3}{(h_1 - h_3) + (h_3 - h_{3s}) + \frac{T_3}{T_2} (h_2 - h_{2s})}$$

**Toberas:**  $h_2 - h_{2s} = \frac{1}{2} c_2^2 \xi_N$

**Rotor:**  $h_3 - h_{3s} = \frac{1}{2} W_3^2 \xi_R$

$\xi =$  Coeficiente de pérdidas

**Condiciones totales a totales**

$$\eta_{tt} = \frac{h_1 - h_3}{(h_1 - h_3) + \frac{1}{2} W_3^2 \xi_R + \frac{1}{2} c_2^2 \xi_N \frac{T_3}{T_2}} = \left[ 1 + \frac{\xi_R W_3^2 + \xi_N c_2^2 \left( \frac{T_3}{T_2} \right)}{2(h_1 - h_3)} \right]^{-1}$$

## Condiciones totales a estática

$$\eta_{ts} = \frac{h_1 - h_3}{h_1 - h_{3ss} + \frac{1}{2}c_3^2} = \left[ 1 + \frac{\xi_R W_3^2 + \xi_N c_2^2 \left( \frac{T_3}{T_2} \right) + c_3^2}{2(h_1 - h_3)} \right]^{-1}$$

### 4.2. PÉRDIDAS EN LA ETAPA

- Generación de entropía

1) Fricción viscosa en capa límite por mezcla de chorros, por la estela del alabe

Pérdidas	Subsónico (%)	Supersónico (%)
Capa límite	1/3	0.25
Estela	1/3	0.5
Paredes anulares	1/3	0.25

2) Transferencia de calor en diferencias de temperaturas finitas → flujo de refrigeración

3) Procesos en no equilibrio, ondas de choque, expansiones rápidas

- Por fuga de fluido en el extremo de los alabes

### Correlaciones de Soderberg y Zweifel

$$\text{Pérdidas} \rightarrow \text{Deflexión } \varepsilon \left\{ \begin{array}{l} \text{Relación Paso-Cuerda S/b Optimo} \\ \text{Relación aspecto del alabe H/b} \\ \text{Relación Espesor alabe/ Cuerda perfil t/l} \\ \#Re \end{array} \right.$$

Queremos hallar  $\xi_N$  y  $\xi_R$

Se busca la relación S/b óptimo para que las pérdidas sean mínimas

**Zweifel:** Distribución de presiones ideal para que no exista separación de flujo: lado de presión  $P_0$  y lado de succión  $P_2$



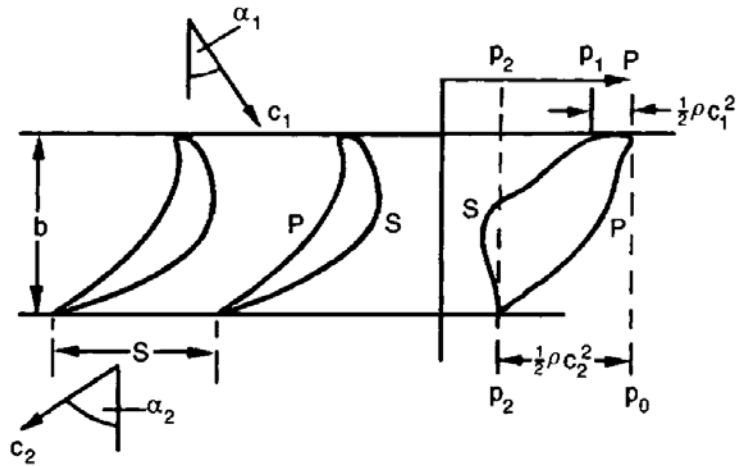


Figura N°24. Distribución de presión en una rejilla de una etapa de una turbina axial

P= lado de presión  
S= lado de succión

### Coefficiente de carga tangencial

$$\Psi_t = \frac{Y_{real}}{Y_{ideal}} = \frac{\rho c_x S (c_x \tan \alpha_1 + c_x \tan \alpha_2)}{b \cdot 1 \cdot (P_0 - P_2)}$$

$$P_0 = P_2 + \frac{1}{2} \rho c_2^2$$

$$b \cdot 1 \cdot (P_0 - P_2) = b \frac{1}{2} \rho c_2^2$$

$$\Psi_t = 2 \cdot \left( \frac{S}{b_N} \right) \cos^2 \alpha_2 (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2) \quad \text{Toberas}$$

$$\Psi_t = 2 \cdot \left( \frac{S}{b_R} \right) \cos^2 \beta_2 (\tan \beta_1 + \tan \beta_2) \quad \text{Rotor}$$

$$\Psi_{t\_optimo} = 0,8$$

**Soderberg:** Se cumple para:

$$H/b = 3$$

$$\#Re = 10^5$$

$$t_{m\acute{a}x}/l = 0,2$$

$$\varepsilon \leq 120^\circ$$

$$\text{Para } i=0 \text{ (incidencia)} \rightarrow \alpha_1 - \alpha_1' = 0$$

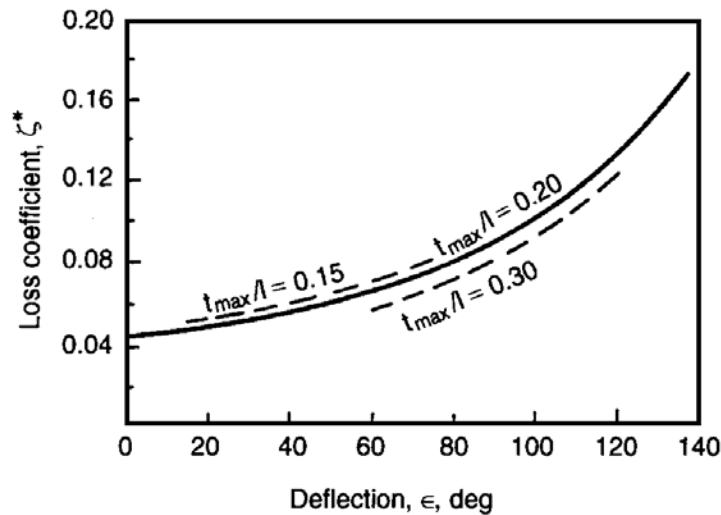


Figura N°25. Correlación de Soderberg para los coeficientes de pérdidas en una turbina en función de la deflexión

$$\xi^* = 0,04 + 0,06 \left( \frac{\varepsilon}{100} \right)^2 \quad \text{Coeficiente de pérdidas}$$

$$\text{Tobera: } \xi_N = 0,04 + 0,06 \left( \frac{\varepsilon_N}{100} \right)^2 \quad \varepsilon_N = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\text{Rotor: } \xi_R = 0,04 + 0,06 \left( \frac{\varepsilon_R}{100} \right)^2 \quad \varepsilon_R = \beta_2 + \beta_3$$

Si no conocemos la deflexión se puede asumir  $\varepsilon \approx \theta$  (curvatura)

$$\theta_N = \alpha'_1 + \alpha'_2$$

$$\theta_R = \beta'_2 + \beta'_3$$

**Si  $H/b \neq 3$**

Tobera

$$1 + \xi_{N1} = (1 + \xi_N^*) (0,993 + 0,021b/H)$$

$$\xi_{N1} = (1 + \xi_N^*) (0,993 + 0,021b/H) - 1$$

Rotor

$$1 + \xi_{R1} = (1 + \xi_R^*) (0,975 + 0,075b/H)$$

$$\xi_{R1} = (1 + \xi_R^*) (0,975 + 0,075b/H) - 1$$

**Si  $\#Re \neq 10^5$**

$$Re = \frac{\rho_2 c_2 D_{h2}}{\mu} \quad D_h = \frac{4A_{flujo}}{P_{mojado}} \quad D_h = \frac{4HS \cos \alpha_2}{2(S \cos \alpha_{2+H})} \quad \xi_2 = \left( \frac{10^5}{Re} \right)^{\frac{1}{4}} \xi_1$$

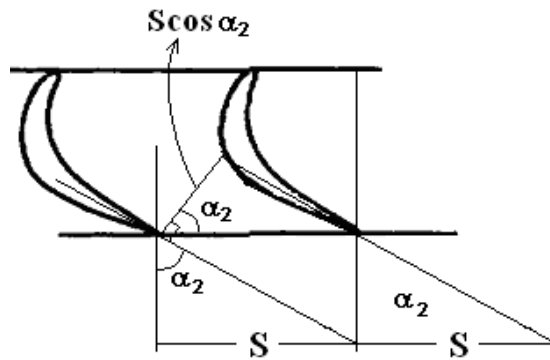


Figura N°26. Esquema del canal interalabe

### Factor de corrección de pérdidas FCP

$$FCP = \frac{\text{Área alabes}}{\text{Área alabes} + \text{holgura}}$$

$$\eta_{tt(\text{corregido})} = \eta_{tt} FCP$$

### 4.3. Tipos de diseño de turbinas axiales

Consideremos el problema de seleccionar el diseño de una turbina axial para la cual se ha elegido de antemano la velocidad media del alabe  $U$ , el trabajo específico  $\Delta W$  y la velocidad axial  $c_x$ . El límite superior de la velocidad del alabe está fijado por tensiones mecánicas y la velocidad axial está limitada por consideraciones de la sección del flujo.

$$\Delta W = U(c_{y2} + c_{y3}) \Rightarrow c_{y3} = \frac{\Delta W}{U} - c_{y2}$$

Para diferentes valores de  $C_{y2}$  se pueden construir los triángulos de velocidades, determinar los coeficientes de pérdidas y calcular  $\eta_{ts}$  y  $\eta_{tt}$ . Stenning consideró una familia de turbinas donde cada turbina tenía un coeficiente de flujo  $C_x/U = 0,4$ , una relación de aspecto de alabe  $H/b = 3$  y número de Reynolds  $= 10^5$  y cálculo  $\eta_{ts}$  y  $\eta_{tt}$  para factores de carga del escalonamiento  $\Delta W/U^2$  de 1, 2 y 3 utilizando la correlación de Soderberg. Los resultados de estos cálculos se muestran en la siguiente figura:

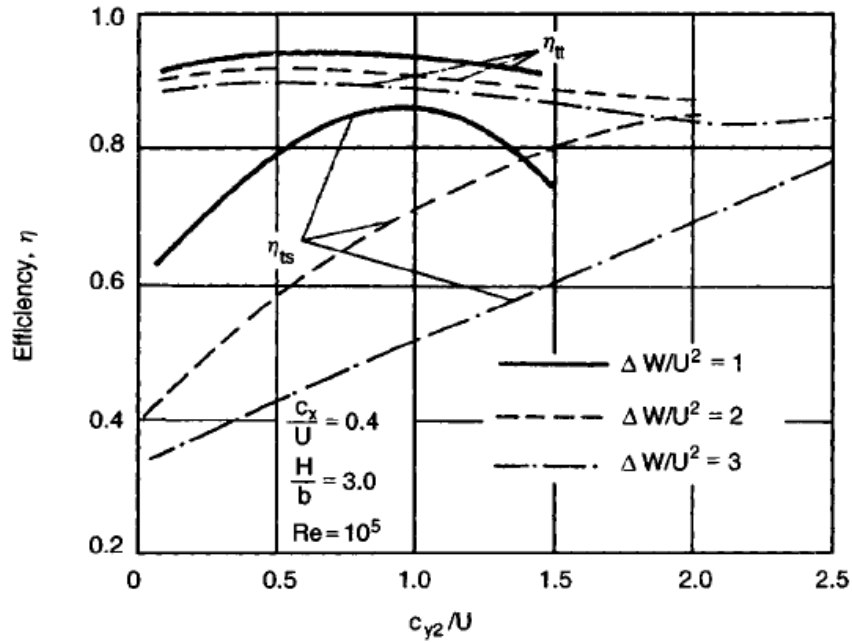


FIG. 4.4. Variation of efficiency with  $(c_{y2}/U)$  for several values of stage loading factor  $\Delta W/U^2$  (adapted from Shapiro *et al.* 1957).

#### 4.4. Grado de Reacción

$R = \frac{\text{Caída de entalpía estática en el rotor}}{\text{Caída de entalpía estática en la etapa}}$

$$R = \frac{h_2 - h_3}{h_1 - h_3}$$

Suponemos etapa normal  $\begin{cases} c_1 = c_3 \\ \alpha_1 = \alpha_3 \end{cases}$  y la velocidad axial constante a lo largo de la etapa

$$R = \frac{h_2 - h_3}{h_{01} - h_{03}}$$

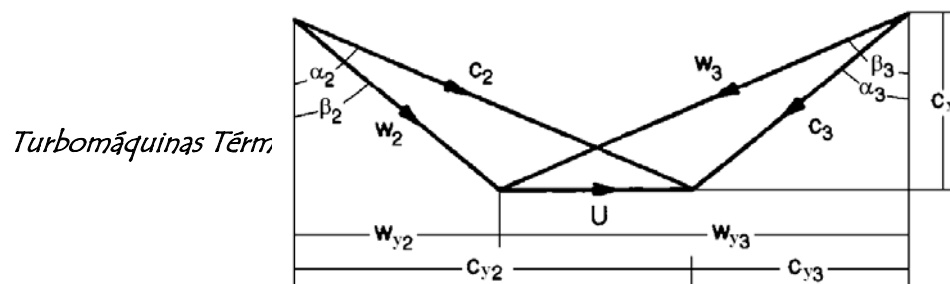
En el rotor

$$h_{02r} = h_{03r}$$

$$h_2 + \frac{1}{2} w_2^2 = h_3 + \frac{1}{2} w_3^2$$

$$h_2 - h_3 = \frac{1}{2} (w_3^2 - w_2^2)$$

Recordando  $\Delta h_0 = h_{01} - h_{03} = U(c_{y2} + c_{y3}) = U(w_{y2} + w_{y3})$



$$\text{Entonces } R = \frac{h_2 - h_3}{h_{01} - h_{03}} = \frac{w_3^2 - w_2^2}{2U(c_{y2} + c_{y3})}$$

$$w_3^2 - w_2^2 = (w_{y3}^2 + w_x^2) - (w_{y2}^2 + w_x^2) = (w_{y3} + w_{y2})(w_{y3} - w_{y2})$$

$$R = \frac{(w_{y3} + w_{y2})(w_{y3} - w_{y2})}{2U(w_{y2} + w_{y3})} = \frac{(w_{y3} - w_{y2})}{2U} = \frac{C_x}{2U} (\tan \beta_3 - \tan \beta_2)$$

$$\boxed{R = \frac{\phi}{2} (\tan \beta_3 - \tan \beta_2)} \quad \boxed{\phi = \frac{c_x}{U}}$$

$$R = \frac{w_{y3} - w_{y2}}{2U} = \frac{w_{y3} - (c_{y2} - U)}{2U} = \frac{c_x \tan \beta_3 - c_x \tan \alpha_2 + U}{2U}$$

$$\boxed{R = \frac{1}{2} + \frac{c_x (\tan \beta_3 - \tan \alpha_2)}{2U}}$$

$$R = \frac{w_{y3} - w_{y2}}{2U} = \frac{(c_{y3} + U) - (c_{y2} - U)}{2U} = 1 + \frac{c_{y3} - c_{y2}}{2U}$$

$$\boxed{R = 1 + \frac{c_x (\tan \alpha_3 - \tan \alpha_2)}{2U}}$$

### Grado de reacción cero

$$R = \frac{h_2 - h_3}{h_1 - h_3} = 0 \Rightarrow h_2 = h_3$$

$$h_{02r} = h_{03r}$$

$$h_2 + \frac{1}{2} w_2^2 = h_3 + \frac{1}{2} w_3^2 \Rightarrow w_2 = w_3$$

$$R = \frac{\phi}{2} (\tan \beta_3 - \tan \beta_2) = 0 \Rightarrow \beta_3 = \beta_2$$

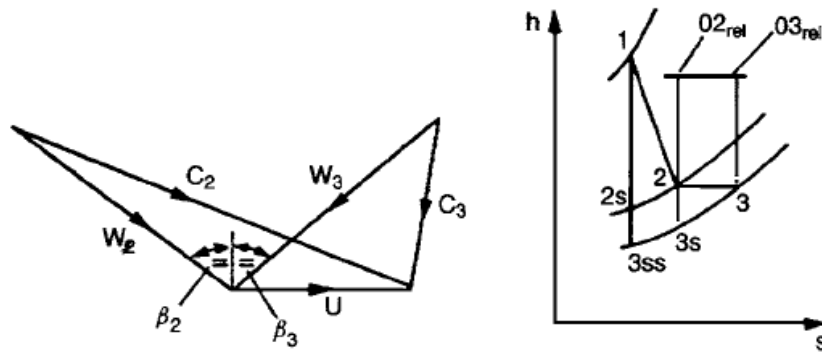


FIG. 4.5. Velocity diagram and Mollier diagram for a zero reaction turbine stage.

### Etapa de turbina de acción o de impulso

Suponga una etapa con 0 caída de presión en el rotor

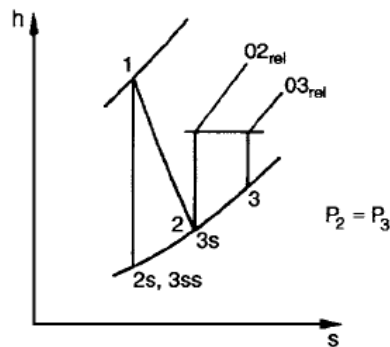


FIG. 4.6. Mollier diagram for an impulse turbine stage.

$$R = \frac{h_2 - h_3}{h_1 - h_3} \Rightarrow \text{Negativo} \quad \text{Etapa de impulso} \rightarrow \text{Admisión Parcial}$$

$$h_{02r} = h_{03r}$$

$$h_2 + \frac{1}{2} w_2^2 = h_3 + \frac{1}{2} w_3^2 \Rightarrow h_3 > h_2 \Rightarrow w_2 > w_3$$

Son ineficientes pero se pueden regular muy bien, se usan casi siempre como primera etapa debido a la regulación.

### Grado de reacción 0,5 (50%)

$$R = \frac{1}{2} + \frac{c_x (\tan \beta_3 - \tan \alpha_2)}{2U} = 0,5 \Rightarrow \beta_3 = \alpha_2$$

$$R = \frac{h_2 - h_3}{h_1 - h_3} = 0,5 \Rightarrow h_1 - h_2 = h_2 - h_3$$

Los triángulos de velocidades son simétricos por los tanto los alabes en el rotor y en el estator son iguales. Sólo difieren en que el rotor gira y el estator está fijo. La mayoría de

las turbinas comerciales tienen este grado de reacción debido a que es más económico construir el rotor y el estator con alabes iguales.

$$\beta_3 = \alpha_2 \quad c_3 = w_3$$

$$\alpha_3 = \beta_2 \quad c_3 = w_2$$

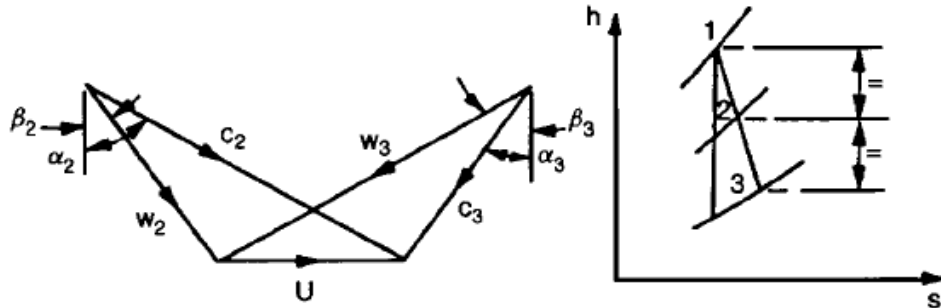


FIG. 4.7. Velocity diagram and Mollier diagram for a 50% reaction turbine stage.

### Grado de reacción 1 (100%)

$$R = 1 + \frac{c_x (\tan \alpha_3 - \tan \alpha_2)}{2U} = 1 \Rightarrow \alpha_3 = \alpha_2$$

$$R = \frac{h_2 - h_3}{h_1 - h_3} = 1 \Rightarrow h_1 = h_2$$

$$h_{01} = h_{02} \Rightarrow \frac{1}{2}c_1^2 = \frac{1}{2}c_2^2 \Rightarrow c_1 = c_2 \text{ El estator no trabaja como tobera}$$

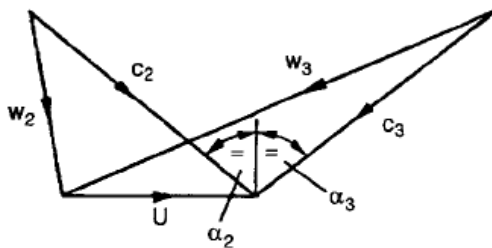
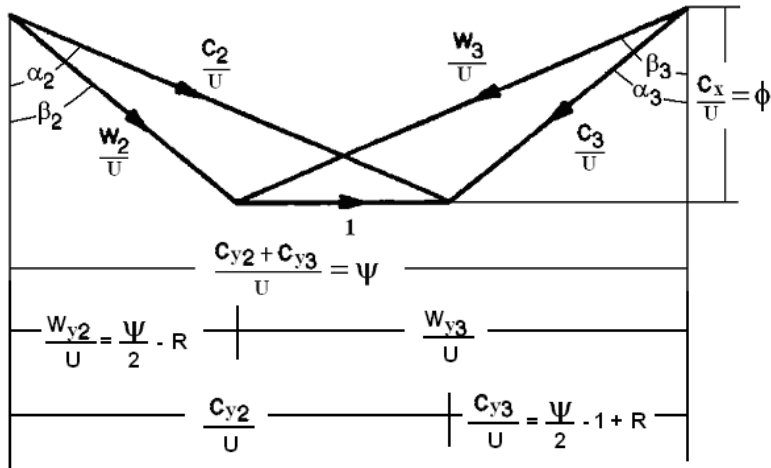


FIG. 4.8. Velocity diagram for 100% reaction turbine stage.

### Triángulo de velocidades relacionado con el grado de reacción

$$R = \frac{h_2 - h_3}{h_1 - h_3} \quad R = \frac{w_{y3} - w_{y2}}{2U}$$



$$\tan \beta_2 = \left( \frac{\psi}{2} - R \right) \frac{1}{\phi} \quad \tan \alpha_2 = \left( \frac{\psi}{2} - R + 1 \right) \frac{1}{\phi}$$

$$\tan \beta_3 = \left( \frac{\psi}{2} + R \right) \frac{1}{\phi} \quad \tan \alpha_3 = \left( \frac{\psi}{2} - 1 + R \right) \frac{1}{\phi}$$

$$R = \frac{w_{y3} - w_{y2}}{2U} = \frac{(c_{y3} + U) - (c_{y2} - U)}{2U} = 1 + \frac{c_{y3} - c_{y2}}{2U}$$

$$\Delta W = U(c_{y2} + c_{y3}) \Rightarrow c_{y3} = \frac{\Delta W}{U} - c_{y2}$$

$$\boxed{R = 1 + \frac{\Delta W}{2U^2} - \frac{c_{y2}}{U}} \rightarrow \boxed{R = 1 + \frac{\psi}{2} - \phi \tan \alpha_2}$$



## 5. COMPRESORES AXIAIS (Flujo Bidimensional)

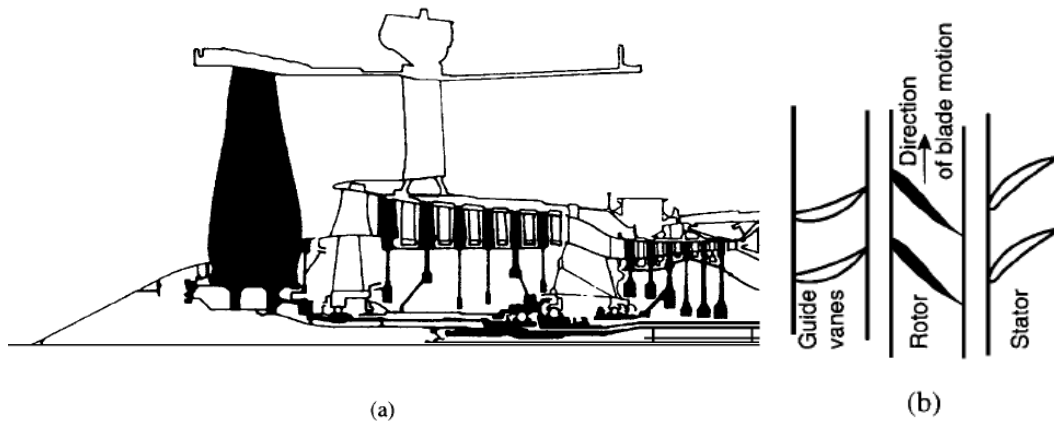


FIG. 5.1. Axial-flow compressor and blading arrays. (a) Section of the compression system of the RB211-535E4 gas-turbine engine (courtesy of Rolls-Royce plc). (b) Development of the first stage-blade rows and inlet guide vanes.

### Triângulo de velocidades

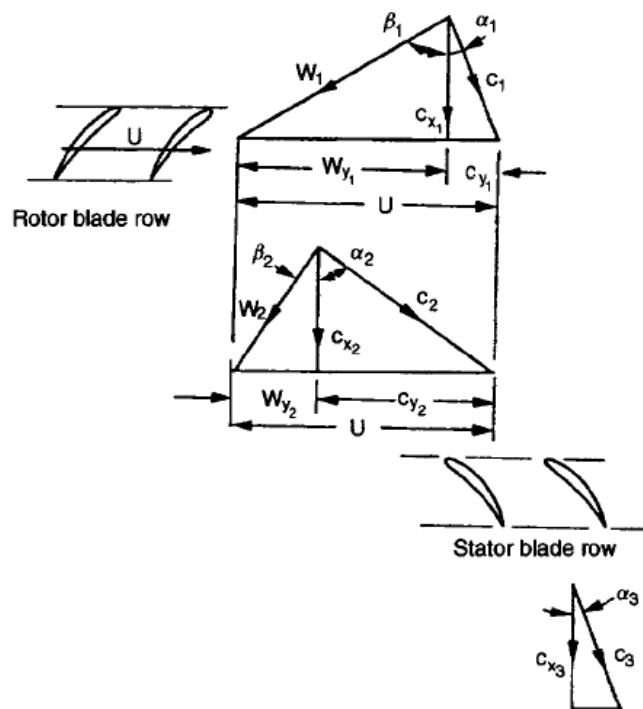


FIG. 5.2. Velocity diagrams for a compressor stage.

Vamos a suponer en este curso  $\rightarrow c_{x1} = c_{x2} = c_{x3} = w_{x1} = w_{x2}$  y etapa normal  $c_1 = c_3$   
 $\alpha_1 = \alpha_3$

Se obtiene en forma análoga a las turbinas axiales la ecuación de Euler:

$$\dot{W} = \dot{m}[h_{03} - h_{01}] = \dot{m}U(c_{y2} - c_{y1})$$

$$\Delta h_0 = h_{03} - h_{01} = U(c_{y2} - c_{y1})$$

Se puede demostrar

### Rotor

$$h_1 + \frac{1}{2}w_1^2 = h_2 + \frac{1}{2}w_2^2$$

$$h_{01r} = h_{02r}$$

### Difusor

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m}\left[(h_3 - h_2) + \frac{1}{2}(c_3^2 - c_2^2)\right] \quad \text{Difusor: } Q=0 \text{ y } W=0$$

$$h_2 + \frac{1}{2}c_2^2 = h_3 + \frac{1}{2}c_3^2 \Rightarrow h_{02} = h_{03} \quad \text{Se desacelera el flujo}$$

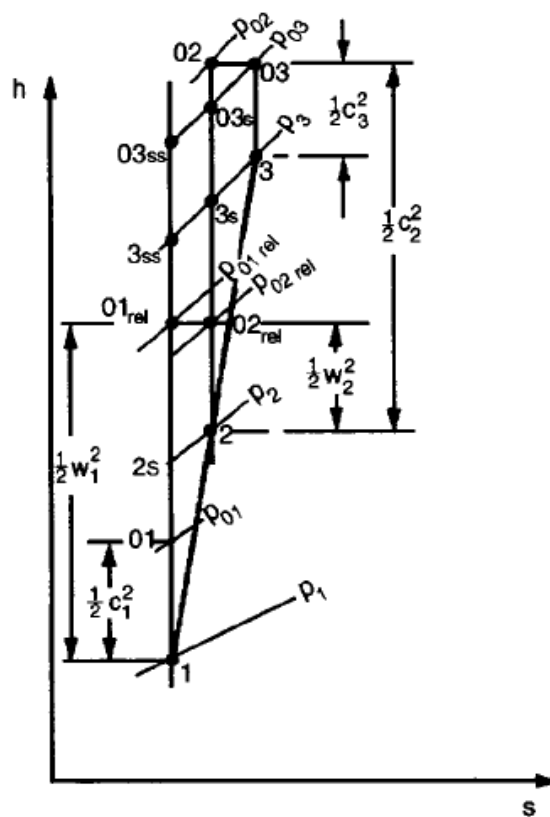


FIG. 5.3. Mollier diagram for an axial compressor stage.

$$\Delta h_0 = h_{03} - h_{01} = U(c_{y2} - c_{y1})$$

$$\text{Triángulos } \left. \begin{array}{l} U - w_{y1} = c_{y1} \\ U - w_{y2} = c_{y2} \end{array} \right\} c_{y2} - c_{y1} = w_{y1} - w_{y2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta h_0 = h_{03} - h_{01} = U(c_{y2} - c_{y1}) = U(w_{y1} - w_{y2}) = UC_x (\tan \beta_1 - \tan \beta_2) \\ \Delta h_0 = h_{03} - h_{01} = C_p (T_{03} - T_{01}) = C_p \Delta T_0 \end{array} \right.$$

$$\Delta T_0 = \frac{UC_x}{C_p} (\tan \beta_1 - \tan \beta_2)$$

### 5.1. Eficiencia de la etapa y Relación de Compresión

$$\eta_{etapa} = \frac{h_{03ss} - h_{01}}{h_{03} - h_{01}} = \frac{T_{03ss} - T_{01}}{T_{03} - T_{01}} = \frac{T_{01} \left( \frac{T_{03}}{T_{01}} - 1 \right)}{\Delta T_{0etapa}}$$

$$\eta_{etapa} = \frac{T_{01} \left( \left( \frac{P_{03}}{P_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)}{\Delta T_{0etapa}}$$

$$\frac{P_{03}}{P_{01}} = \left[ 1 + \eta_{etapa} \frac{\Delta T_{0etapa}}{\Delta T_{01}} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

#### Eficiencia de la etapa

$$\eta_{etapa} = \frac{h_{03ss} - h_{01}}{h_{03} - h_{01}} = \frac{(h_{03} - h_{01}) - (h_{03s} - h_{03ss})}{h_{03} - h_{01}} = \frac{(h_{03} - h_{01}) - (h_{03s} - h_{03ss})}{h_{03} - h_{01}}$$

$$Tds = dh - vdP$$

$$dP = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial h}{\partial s} \right)_P = T \Rightarrow \Delta h = T \Delta s$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{03s} - h_{03ss} = T_{03} (s_{03s} - s_{03ss}) \\ h_2 - h_{2s} = T_2 (s_2 - s_{2s}) \end{array} \right.$$

$$h_2 - h_{2s} = T_2 (s_2 - s_{2s})$$

$$(s_{03s} - s_{03ss}) = (s_2 - s_{2s}) \Rightarrow \text{ver\_diagrama\_Mollier\_compresor}$$

$$h_{03s} - h_{03ss} = \frac{T_{03}}{T_2} (h_2 - h_{2s})$$

$$\begin{cases} h_{03} - h_{03s} = T_{03}(s_{03} - s_{03s}) \\ h_3 - h_{3s} = T_3(s_3 - s_{3s}) \\ (s_{03} - s_{03s}) = (s_3 - s_{3s}) \Rightarrow \text{ver\_diagrama\_Mollier\_compresor} \end{cases}$$

$$h_{03} - h_{03s} = \frac{T_{03}}{T_3}(h_3 - h_{3s})$$

$$\eta_{etapa} = \frac{h_{03ss} - h_{01}}{h_{03} - h_{01}} = \frac{(h_{03} - h_{01}) - \frac{T_{03}}{T_2}(h_2 - h_{2s}) - \frac{T_{03}}{T_3}(h_3 - h_{3s})}{h_{03} - h_{01}} \quad \text{Suponemos } \frac{T_{03}}{T_2}, \frac{T_{03}}{T_3} \approx 1$$

Se supone densidad constante para la etapa  $P_0 = P + \frac{1}{2}\rho c^2$  Flujo incompresible

### Difusor

$$h_{02} = h_{03} \Rightarrow h_2 + \frac{1}{2}c_2^2 = h_3 + \frac{1}{2}c_3^2$$

$$h_3 - h_2 = \frac{1}{2}(c_2^2 - c_3^2) = \frac{[(P_{02} - P_2) - (P_{03} - P_3)]}{\rho} \quad (a)$$

$$Tds = 0 = dh - \frac{1}{\rho}dP \Rightarrow dh = \frac{dP}{\rho} \rightarrow h_{3s} - h_2 = \frac{P_3 - P_2}{\rho} \quad \text{Ver diagrama (b)}$$

Restando (a) y (b)

$$h_3 - h_2 - h_{3s} + h_2 = \frac{(P_{02} - P_2) - (P_{03} - P_3) - (P_3 - P_2)}{\rho} \rightarrow h_3 - h_{3s} = \frac{P_{02} - P_{03}}{\rho} = \frac{\Delta P_{0ESTATOR}}{\rho}$$

### Rotor

$$h_{01r} = h_{02r} \rightarrow h_1 + \frac{1}{2}w_1^2 = h_2 + \frac{1}{2}w_2^2 \quad \text{y} \quad P_{0r} = P + \frac{w^2}{2}$$

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{\rho}[(P_{01r} - P_1) - (P_{02r} - P_2)] \quad (a)$$

De forma análoga al caso anterior  $h_{2s} - h_1 = \frac{P_2 - P_1}{\rho}$  Ver diagrama (b)

Restando (a) y (b)  $h_2 - h_{2s} = \frac{1}{\rho}(P_{01r} - P_{02r}) = \frac{\Delta P_{0rROTOR}}{\rho}$

Entonces  $\eta_{etapa} = \frac{h_{03ss} - h_{01}}{h_{03} - h_{01}} = 1 - \frac{\Delta P_{0rROTOR} + \Delta P_{0ESTATOR}}{\rho(h_{03} - h_{01})}$

## 5.2. Grado de Reacción

$R = \frac{\text{Incremento de entropía estática en el rotor}}{\text{Incremento de entropía estática en la etapa}}$

$$R = \frac{h_2 - h_1}{h_3 - h_1}$$

Suponemos etapa normal  $\left\{ \begin{array}{l} c_1 = c_3 \\ \alpha_1 = \alpha_3 \end{array} \right.$  y la velocidad axial constante a lo largo de la etapa

En el rotor

$$h_{01r} = h_{02r}$$

$$h_1 + \frac{1}{2} w_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} w_2^2$$

Como  $c_1 = c_3$

$$\Delta h_0 = h_{01} - h_{03} = h_1 - h_3 = U(c_{y2} - c_{y1})$$

$$R = \frac{h_2 - h_1}{h_3 - h_1} = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2U(c_{y2} - c_{y1})} = \frac{(w_{y1}^2 + w_{x1}^2) - (w_{y2}^2 + w_{x2}^2)}{2U(c_{y2} - c_{y1})} = \frac{(w_{y1} + w_{y2})(w_{y1} - w_{y2})}{2U(c_{y2} - c_{y1})}$$

$$\text{Triángulos } \left. \begin{array}{l} U - w_{y1} = c_{y1} \\ U - w_{y2} = c_{y2} \end{array} \right\} c_{y2} - c_{y1} = w_{y1} - w_{y2}$$

$$R = \frac{w_{y1} + w_{y2}}{2U} = \frac{c_x (\tan \beta_1 + \tan \beta_2)}{2U} = \phi \tan \alpha_m$$

$$\tan \alpha_m = \frac{\tan \beta_1 + \tan \beta_2}{2}$$

También se puede escribir de la siguiente manera  $w_{y1} = U - c_{y1}$

$$R = \frac{w_{y1} + w_{y2}}{2U} = \frac{U - c_{y1} + w_{y2}}{2U} = \frac{1}{2} + \frac{c_x}{2U} (\tan \beta_2 - \tan \alpha_1)$$

Para  $R=0,5$  se reparte la pérdida por igual en el rotor y en el difusor y resulta que la etapa es más eficiente. Para  $R=0,5$  los triángulos son simétricos

$$\beta_2 = \alpha_1 \quad w_2 = c_1$$

$$\alpha_2 = \beta_1 \quad c_2 = w_1$$

Para  $R$  diferente a 0,5 se muestra a continuación como varían los triángulos de velocidades

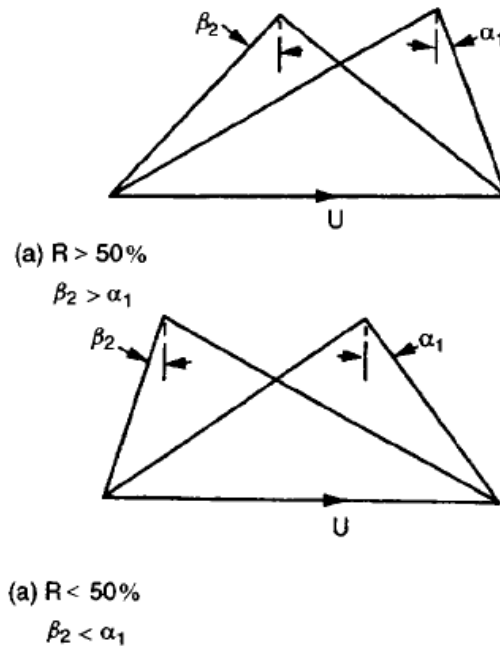


FIG. 5.4. Asymmetry of velocity diagrams for reactions greater or less than 50%.

### 5.3. Factor o coeficiente de carga

**Coeficiente o factor de carga**

$$\psi = \frac{\Delta W}{U^2}$$

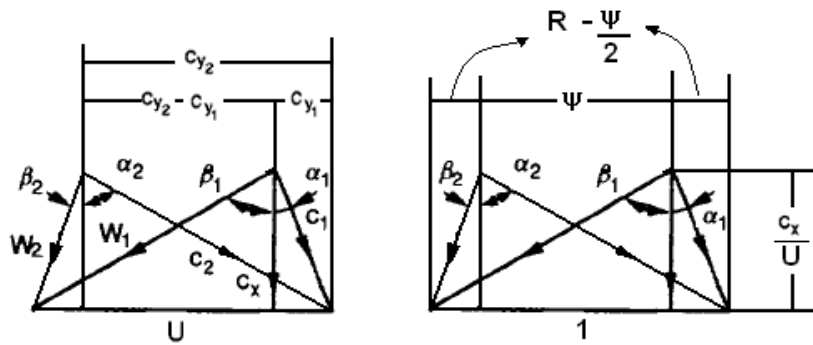
$$\Delta W = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = h_{03} - h_{01} = U(c_{y2} - c_{y1})$$

$$\psi = \frac{U(c_{y2} - c_{y1})}{U^2} = \frac{c_{y2} - c_{y1}}{U} = \frac{U - w_{y2} - c_{y1}}{U} = \frac{U - c_x \tan \beta_2 - c_x \tan \alpha_1}{U}$$

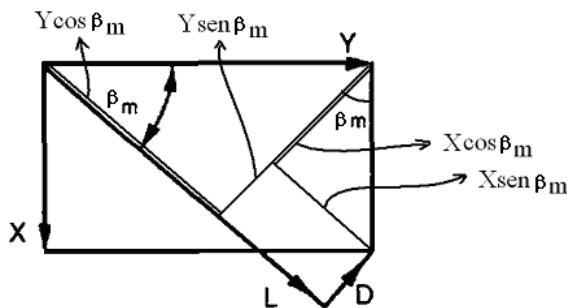
$$\psi = 1 - \frac{c_x (\tan \beta_2 + \tan \alpha_1)}{U}$$

$$\psi = 1 - \phi (\tan \beta_2 + \tan \alpha_1)$$

**Triangulo de velocidades unitario con R=0,5**



El factor de carga del escalonamiento se puede expresar también en función de los coeficientes de sustentación y resistencia para el rotor



Fuerza tangencial:  $Y = L \cos \beta_m + D \operatorname{sen} \beta_m$

Fuerza axial:  $X$

$$\tan \beta_m = \frac{\tan \beta_1 + \tan \beta_2}{2}$$

$$Y = L \cos \beta_m \left( 1 + \frac{D}{L} \tan \beta_m \right)$$

**Coefficiente de sustentación**

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho w_m^2 l \times 1}$$

**Coefficiente de arrastre**

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho w_m^2 l \times 1}$$

$$\frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D}$$

$$Y = \frac{1}{2} \rho w_m^2 l C_L \cos \beta_m \left( 1 + \frac{C_D}{C_L} \tan \beta_m \right) = \frac{1}{2} \rho c_x^2 l C_L \sec \beta_m \left( 1 + \frac{C_D}{C_L} \tan \beta_m \right)$$

$$Y = \frac{1}{2} \rho c_x^2 l \sec \beta_m (C_L + C_D \tan \beta_m)$$

El trabajo realizado por cada alabe móvil pro segundo es  $YU$  y es transferido al fluido que evoluciona a través de un conducto de alabes durante dicho periodo.

Potencia = Fuerza x Velocidad =  $YU$

$$YU = \dot{m}(h_{03} - h_{01}) = \rho S C_x (h_{03} - h_{01})$$

$$\psi = \frac{h_{03} - h_{01}}{U^2} = \frac{YU}{\rho S c_x U^2} = \frac{c_x l \sec \beta_m}{2US} (C_L + C_D \tan \beta_m)$$

$$\psi = \frac{\phi \cdot l \cdot \sec \beta_m}{2S} (C_L + C_D \tan \beta_m) \quad \text{El rendimiento optimo se obtiene para } \begin{matrix} \beta_m \approx 45^\circ \\ C_D \ll C_L \end{matrix}$$

$$\psi_{optimo} = \frac{\phi}{\sqrt{2}} \frac{l}{S} (C_L + C_D)$$

#### 5.4. Características de funcionamiento fuera de diseño

Horlock ha considerado como se comporta la carga del escalonamiento con la variación del coeficiente de flujo  $\phi$  y como resulta influenciada esta característica de funcionamiento fuera de diseño por la elección de condiciones de diseño. Los datos de cascadas sugieren que los ángulos de salida del fluido  $\beta_2$  (para el rotor) y  $\alpha_1 (= \alpha_3)$  para el estator no varían apreciablemente para una gama de incidencias, hasta que se alcanza el punto de desprendimiento. Se puede hacer la simplificación de que, para un escalonamiento dado:

$$\tan \alpha_1 + \tan \beta_2 = t = ctte$$

$$\psi = 1 - \phi(\tan \beta_2 + \tan \alpha_1) = 1 - \phi \cdot t$$

$$\psi = \frac{h_{03} - h_{01}}{U^2}$$

Para U constante si el flujo másico disminuye  $\dot{m} = \rho A c_x$ ,  $C_x$  disminuye,  $\phi$  disminuye,  $\psi$  aumenta y por lo tanto  $h_{03} - h_{01}$  aumenta

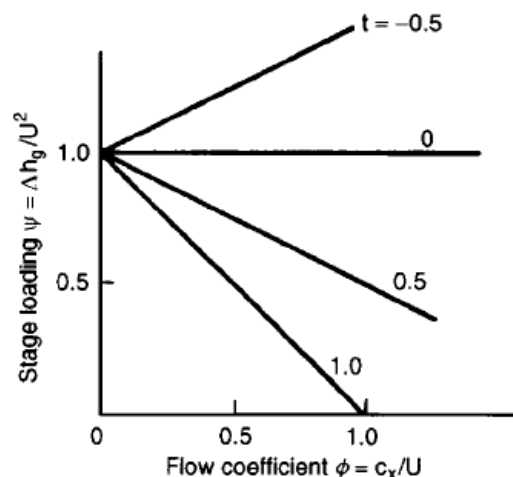


FIG. 5.5. Simplified off-design performance of a compressor stage (adapted from Horlock 1958).



Para el punto de diseño  $\psi_d = 1 - \phi_d \cdot t \Rightarrow t = \frac{1 - \psi_d}{\phi_d}$

t se fija sin tener en cuenta el grado de reacción y por lo tanto la variación de la carga del escalonamiento para condiciones fuera de diseño no depende de la elección del grado de reacción de diseño.

$$\psi = 1 - \phi \left( \frac{1 - \psi_d}{\phi_d} \right) \Rightarrow \frac{\psi}{\psi_d} = \frac{1}{\psi_d} - \frac{\phi}{\phi_d} \left( \frac{1 - \psi_d}{\psi_d} \right)$$

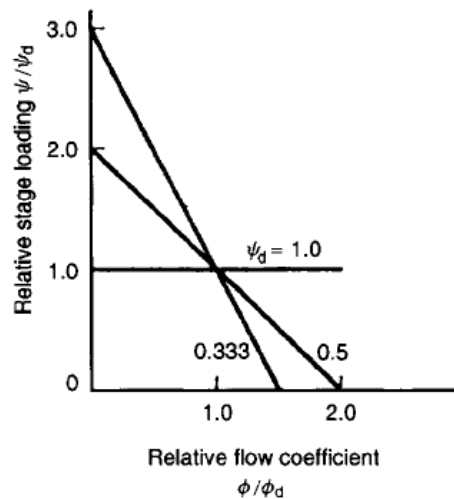


FIG. 5.6. Effect of design stage loading ( $\psi_d$ ) on simplified off-design performance characteristics (adapted from Horlock 1958).

Cuando  $\psi_d \approx 0,33$  pequeñas variaciones de  $\phi$  producen grandes variaciones de  $\psi$  y este es el funcionamiento más eficiente.

## REFERENCIAS

- 1.- Apuntes Máquinas Térmicas. Profesor Pedro PIERETTI
- 2.- Apuntes Máquinas Térmicas. Profesor Miguel ASUAJE
- 3.- Termodinámica de las Turbomáquinas. S. L. Dixon. Editorial Dossat, S.A:
- 4.-Turbomachinery Performance Analysis. R. I. Lewis. Editorial Arnold